Université de Provence	2008-2009
Licence MI	1ère année-S1

Mathématiques générales I

Correction géométrie

Novembre 2009

Durée : 2 heures *Ni document ni calculette autorisés*

Exercice 1

Dans cet exercice, il fallait surtout ne pas décrire l'ensemble décrit par les points "M" "inconnus en utilisant justement la lettre "M" ; exemple : c est la droite (AM), alors que M est en train de varier ! ! !

1. $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ signifie les deux vecteurs sont colinéaires. Comme de plus ils engendrent chacun une droite passant par un même point A, ils sont les vecteurs directeurs de cette même droite. Donc M décrit la droite (AB).
2. $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$: le vecteur issu du produit $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}$ est par propriété orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$. Il ne peut donc être aussi colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Donc l'ensemble des solutions est vide. (A et B sont deux points distincts, donc on n'a pas le vecteur nul des deux cotés de l'égalité.)
3. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$: cette égalité signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux l'un à l'autre : Donc les points M décrivent le plan passant par A et ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ (ici il fallait faire attention que l'on était dans l'espace).
4. C'est la droite perpendiculaire à (AB) passant par A
5. C'est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 2

On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB) : x + 2y = 3, (AC) : x + y = 2, (BC) : 2x + 3y = 4$.

1. Il suffit de résoudre 3 systèmes de deux équations linéaires ; on trouve : $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$ et $C(2, 0)$.
2. Alors $A'(\frac{1}{2}, 1)$, $B'(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ et $C'(0, \frac{3}{2})$.
3. Les médianes sont les droites (AA') (BB') et (CC'), dont les vecteurs directeurs sont respectivement $\overrightarrow{AA'} = (-\frac{1}{2}, 0)$, $\overrightarrow{BB'} = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ et $\overrightarrow{CC'} = (-2, \frac{3}{2})$. Alors leurs vecteurs normaux sont respectivement $(0, \frac{1}{2})$, $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ et $(\frac{3}{2}, 2)$. D'où les équations cartésiennes sont de la forme (respectivement) :

$$\frac{1}{2}y + a = 0$$

$$-\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y + b = 0$$

$$\frac{3}{2}x + 2y + c = 0$$

avec a, b, c réels à déterminer. Comme A appartient à la première droite on a $a = -\frac{1}{2}$, idem $b = \frac{7}{2}$ et $c = -3$.

L'intersection des droites est le point $(\frac{2}{3}, 1)$. (Pour montrer qu'elles sont concourantes on calcule le point d'intersection de deux d'entre elles , puis on vérifie que ce point d'intersection est sur la troisième droite).

EXERCICE 3

Soit P_1 d'équation :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t + 3s \\ z = -s \end{cases}$$

Alors P_1 admet comme couple de vecteurs directeurs $u_1 = (1, 2, 0)$ et $v_1 = (0, 3, -1)$. De plus P_1 passe par le point $A(1, 1, 0)$.
Soit P_2 d'équation :
et $\begin{cases} x = 2 + t + s \\ y = -3 + 5t - s \\ z = 2 - t + s \end{cases}$

Alors P_2 admet comme couple de vecteurs directeurs $u_2 = (1, 5, -1)$ et $v_2 = (1, -1, 1)$. De plus P_2 passe par le point $B(2, -3, 2)$.
Pour montrer que les deux plans sont confondus il suffit de montrer qu'ils sont parallèles et qu'ils ont un point en commun. Pour cela il suffit de montrer que

1. ils ont des vecteurs normaux colinéaires

2. Il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} 2 = 1 + t \\ -3 = 1 + 2t + 3s \\ 2 = -s \end{cases}$

(c'est à dire que $B \in P_1$)

Soit $n_1 = u_1 \wedge v_1 = (-2, 1, 3)$ un vecteur normal à P_1 et $n_2 = u_2 \wedge v_2 = (4, -2, -6) = -2n_1$ un vecteur normal à P_2. Les deux vecteurs sont colinéaires donc les plans sont parallèles. De plus pour $t = 1$ et $s = -2$ on a $B \in P_1$.

Une équation cartésienne du plan sera de la forme
$$-2x + y + 3z + d = 0$$
(on a déjà calculé un vecteur normal n_1) avec d à calculer. Comme A appartient au plan on obtient :
$$d = -(-2.1 + 1.1 + 3.0) = 1$$
.

EXERCICE 4

Soient M_1, M_2 et M_3 trois points d'affixe z_1 , z_2 et z_3 respectivement (tous différents).

1. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$ de module 1 tel que
$$(1 - \alpha)z_1 + \alpha z_2 - z_3 = 0$$
Alors on a
$$\alpha(z_2 - z_1) = z_3 - z_1$$
et en terme de module on a :
$$|(z_2 - z_1)| = |z_3 - z_1|$$
On rappelle que le module de la différence de deux nombres complexes représente la longueur entre les points d'affixe ces nombres complexes. D'où $(M_1M_2M_3)$ est isocèle de sommet M_1 et de base M_2M_3.

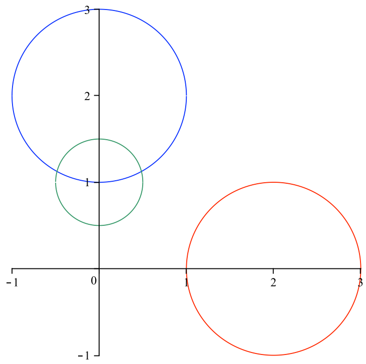
2. Supposons que le triangle est isocèle de sommet M_1 et de base M_2M_3 (quitte à renommer les sommets). Alors on a
$$M_1M_2 = M_1M_3$$

Donc
$$|(z_2 - z_1)| = |z_3 - z_1|$$
D'où
$$|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}| = 1$$
i.e. $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ est un nombre complexe de module 1, donc il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = e^{i\theta} = \alpha$
Si $\theta = 0$ alors $z_2 = z_3$ et on n'a plus de triangle.
Si $\theta = \pi$ alors $\alpha = -1$ et les trois points sont alignés, on n' a pas non plus un triangle général.
D'où $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

3. Avec les notations précédentes l'angle en M_1 est $|\theta|$

EXERCICE 5

Soient trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, de centres respectifs $(2,0)$, $(0,2)$,$(0,1)$ et de rayons respectifs 1, 1 et $\frac{1}{2}$. Il faut écrire les nombres en coordonnées complexes pour pouvoir faire les calculs.
1.

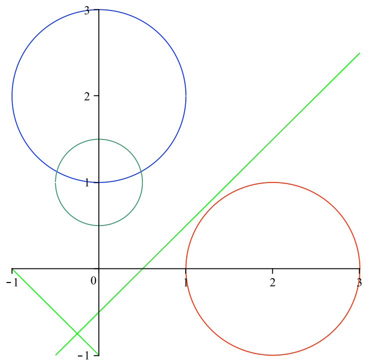


2. Soit f la similitude de centre $(0,0)$ qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$.
2.1. Les deux cercles ont même rayon donc le rapport de la similitude est 1. Le centre de C_1 est sur les abscisses et celui de C_2 sur les ordonnées donc comme la similitude est de centre $(0,0)$ et qu'elle envoie le centre sur le centre, l'angle est égal à $\frac{\pi}{2}$
2.2. Alors $f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}z$.
2.3. C'est une rotation.
3. Soit g la similitude de centre $(0,0)$ qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_3$.
3.1. Le rapport est donne par $r = \frac{|e^{i\pi}|}{|2|} = \frac{1}{2}$. L'angle est celui entre les centres des cercles par rapport à l'origine . Le même argument que précédemment donne un angle de $\frac{\pi}{2}$
3.2. Alors $g = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}z$.
3.3. non

4. Les affixes sont $z_1 = 2$ et $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ des centres A_1 et A_2 de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement.
5. Soit h une similitude qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$.
5.1. Si A d'affixe z_A est le centre de h alors $|z_1 - z_A| = r|z_2 - z_A|$ ou r est le rapport de la similitude. Or les deux cercles ont le même rayon donc le rapport est de 1. D'ou le résultat.
5.2. Si z vérifie $|z_1 - z| = |z_2 - z|$, alors il existe θ tel que
$$\frac{|z_1 - z|}{|z_2 - z|} = e^{i\theta}$$
On pose
$$f(y) = e^{i\theta}(y - z) + z$$
et on montre que cette similitude envoie C_1 sur C_2 et qu' elle est de centre z et de rapport 1.
L'autre sens est donne par la question precedente

5.3. Alors l'ensemble des points du plan qui sont les centres des similitudes dans $\mathcal{S}$ est la médiatrice de $[A_1, A_2]$.
6. Soit k une similitude qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_3$.
6.1.
6.2. Pour ces deux questions ce sont les mêmes arguments que dans la question précédente.
6.3. $\{z/|z_1 - z| = 2|z_3 - z|\}$ représente un cercle de centre $(\frac{-2}{3}, \frac{4}{3})$ et de rayon $\frac{\sqrt{20}}{3}$

7. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équations respectives : $x + y + 1 = 0$ et $x - y - \frac{1}{2}$.
Soit s une similitude qui envoie $\mathcal{D}_1$ sur $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_3$. Soit A son centre.
7.1. Faire une figure.



7.2. Quel est le rapport et l'angle de s ?

La similitude est de rapport $\frac{1}{2}$. De plus l'angle entre les deux droites est $\frac{\Pi}{2}$ (On remarque que les vecteurs normaux sont orthogonaux) donc il en est de même pour la similitude.
7.3. Que peut on dire en termes d'angle et de norme des vecteurs $\overrightarrow{I_1A}$ et $\overrightarrow{I_3A}$? L'angle entre les deux vecteurs est l'angle de la similitude car celle-ci envoie I_1 sur I_3 et on a $I_1A = 2I_3A$.
7.4. Par les questions précédentes on a que A est sur le cercle de centre $(\frac{-2}{3}, \frac{4}{3})$ et de rayon $\frac{\sqrt{20}}{3}$.
Comme l'angle est égal à $\frac{\Pi}{2}$, A est sur le cercle de diamètre $[I_1I_3]$, donc sur le cercle de centre $(1, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Les centre possibles sont sur l'intersection de ces deux cercles.
Seuls un des centres est possible pour envoyer D_1 sur D_2. Il faut calculer les centres , les placer sur la figure pour trouver le bon (à faire).

Exercice 6

Soient A, B et C d'affixes a,b,c.
On suppose que

$$a + bj + cj^2 = 0$$

(où j est un racine troisième de l'unité non réelle).

(aide : on rappelle que on a $1 + j + j^2 = 0$)
Donc $j^2 = -1 - j$ alors la relation devient :

$$a - c = j(c - b)$$

Comme j est une racine cubique de l'unité il est de module 1 donc on a $AC = BC$.
On a aussi $1 = -j - j^2$ donc

$$j(b - a) = j^2(a - c)$$

et $j = -1 - j^2$ et donc

$$(a - b) = j^2(b - c)$$

D'où $AB = AC$ et $AB = BC$.

Fin de la correction