

Mathématiques Générales I*Correction du partiel du 15 décembre 2010*

– I –

1)

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - 1.$$

2)

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x \cos(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx = [\sin(\sqrt{1+x^2})]_0^{\sqrt{2}} = \sin(\sqrt{3}) - \sin(1).$$

3) En effectuant le changement de variable $x = \sinh(t)$ on a $dx = \cosh(t)dt$ et donc :

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^{\operatorname{argsinh}(\sqrt{2})} \frac{\cosh(t)}{\sqrt{1+\sinh^2(t)}} dt = \int_0^{\operatorname{argsinh}(\sqrt{2})} dt = \operatorname{argsinh}(\sqrt{2})$$

– II –

Posons $I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos(2x) dx$. En faisant une première intégration par parties on a :

$$I = [e^x \cos(2x)]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} e^x \sin(2x) dx.$$

Puis une deuxième intégration par parties donne :

$$I = [e^x \cos(2x)]_0^{\pi/2} + 2[e^x \sin(2x)]_0^{\pi/2} - 4 \int_0^{\pi/2} e^x \cos(2x) dx.$$

On en déduit que $5I = -e^{\pi/2} - 1$, ou encore $I = \frac{-e^{\pi/2} - 1}{5}$.

– III –

Soient $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$.On a $I + J = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$ et

$$I - J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx = [\ln(\sin(x) + \cos(x))]_0^{\pi/2} = 0.$$

On en déduit que $I = J = \pi/4$.Remarque : On a omis les valeurs absolues dans la fonction $\ln$ car dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ la fonction $\sin$ et la fonction $\cos$ sont positives.

– IV –

On considère l'équation différentielle :

$$y'(t) = \frac{ty(t)}{\ln(y(t))}$$

1. Cette équation différentielle est séparable et à condition que la fonction y ne s'annule pas on peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{\ln(y(t))}{y(t)} y'(t) = t.$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\left(\frac{\ln(y(t))^2}{2}\right)' = (t^2)' / 2$$

On en déduit que

$$(\ln(y(t)))^2 = t^2 + c,$$

et finalement soit $\ln(y(t)) = +\sqrt{t^2 + c}$ soit $\ln(y(t)) = -\sqrt{t^2 + c}$.

La condition initiale $y(0) = e$ implique que $\ln(y(0))$ est positif et par conséquent on a $\ln(y(0)) = \ln(e) = 1 = +\sqrt{c}$ et on en déduit que $c = 1$ et donc

$$y(t) = e^{\sqrt{t^2+1}}.$$

à valeurs dans $[e, +\infty[$

2. La solution est définie sur $\mathbb{R}$ et a valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Elle ne s'annule jamais ce qui justifie à posteriori qu'on ait divisé par y dans la première question.

– V –

On considère l'équation différentielle :

$$y'(t) + ty(t) = te^{-t^2}. \quad (E)$$

1. La solution générale de l'équation différentielle homogène (e) associée s'écrit :

$$y(t) = ke^{-\int t dt} = ke^{-t^2/2}.$$

2. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = k(t)e^{-t^2/2}$. On a alors

$$y'_p(t) = -tk(t)e^{-t^2/2} + k'(t)e^{-t^2/2},$$

et donc

$$y'_p(t) + ty_p(t) = k'(t)e^{-t^2/2} = te^{-t^2/2}.$$

On en déduit que

$$k'(t) = te^{-t^2/2} = te^{-t^2/2}.$$

Par conséquent

$$k(t) = -e^{-t^2/2},$$

et la solution particulière de l'équation non-homogène est :

$$y_p(t) = -e^{-t^2/2}e^{-t^2/2} = -e^{-t^2}.$$

3. La solution générale de l'équation différentielle non homogène (E) s'écrit donc :

$$y(t) = y_p(t) + ke^{-t^2/2} = -e^{-t^2} + ke^{-t^2/2}.$$

Et $y(0) = 0$ implique que $k = 1$. Donc la solution qui est telle que $y(0) = 0$ est :

$$y(t) = -e^{-t^2} + e^{-t^2/2}.$$

4. La solution de cette équation différentielle tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

– VI –

Soit l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'(t) + (1 + \tan^2(t)) y(t) = t \exp(-\tan(t)). \quad (E)$$

1. L'équation homogène associée à (E) s'écrit :

$$y'(t) + (1 + \tan^2(t)) y(t) = 0. \quad (e)$$

D'après le cours la solution générale de l'équation homogène (e) est :

$$y(t) = k \exp\left(-\int (1 + \tan^2(t))dt\right) = k \exp(-\tan(t))$$

2. Posons $y_p(t) = k(t) \exp(-\tan(t))$ alors

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= -k(t)(1 + \tan^2(t)) \exp(-\tan(t)) + k'(t) \exp(-\tan(t)) \\ &= -(1 + \tan^2(t)) y_p(t) + k'(t) \exp(-\tan(t)). \end{aligned}$$

Donc pour que y_p vérifie E il faut que :

$$k'(t) \exp(-\tan(t)) = t \exp(-\tan(t)).$$

On en déduit que $k'(t) = t$ donc que $k(t) = \frac{t^2}{2}$. Et finalement la solution particulière de l'équation différentielle (E) obtenue par cette méthode de la variation de la constante est :

$$y_p(t) = \frac{t^2}{2} \exp(-\tan(t)).$$

3. La solution générale de l'équation différentielle (E) s'écrit donc :

$$y(t) = \frac{t^2}{2} \exp(-\tan(t)) + k \exp(-\tan(t)).$$

Et $y(0) = 1$ implique que $k = 1$ donc la solution de (E) telle que $y(0) = 1$ est :

$$y(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \exp(-\tan(t)).$$

Soit l'équation différentielle :

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = te^t \quad (E)$$

1. La solution générale de l'équation différentielle homogène $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$, s'obtient en calculant les racines du polynôme caractéristique :

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

Les racines sont complexes conjuguées égales à $2 + i$ et $2 - i$. Donc d'après le cours la solution générale de l'équation différentielle homogène est :

$$y(t) = e^{2t}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)).$$

Les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ impliquent que $c_1 = 1$ et $c_2 = -1$. La solution cherchée est donc :

$$y(t) = e^{2t}(\cos(t) - \sin(t)).$$

2. Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme de $y_p(t) = (at + b)e^t$. Alors $y'_p(t) = (at + b)e^t + ae^t$ et $y''_p(t) = (at + b)e^t + 2ae^t$. Donc $y''_p(t) - 4y'_p(t) + 5y_p(t) = te^t$ implique que $(2at + 2b - 2a)e^t = te^t$ et par conséquent $a = b = 1/2$. La solution particulière de (E) s'écrit :

$$y_p(t) = \frac{t+1}{2}e^t.$$

3. La solution générale de l'équation différentielle (E) s'écrit donc :

$$y(t) = \frac{t+1}{2}e^t + e^{2t}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)).$$

Et les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ impliquent que $c_1 = 1/2$ et $c_2 = -1$. la solution s'écrit donc :

$$y(t) = \frac{t+1}{2}e^t + e^{2t}\left(\frac{\cos(t)}{2} - \sin(t)\right).$$

4. La solution générale de l'équation différentielle (E) peut aussi s'écrire :

$$y(t) = \frac{t+1}{2}e^t + e^{2(t-1)}(c_1 \cos(t-1) + c_2 \sin(t-1)).$$

Et les conditions $y(1) = y'(1) = 0$ impliquent que $c_1 = -e$ et $c_2 = e/2$. Donc la solution vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$ est :

$$y(t) = \frac{t+1}{2}e^t + e^{2(t-1)}(-e \cos(t-1) + e/2 \sin(t-1)) = \frac{t+1}{2}e^t + e^{2(t-1)}\left(-\cos(t-1) + \frac{\sin(t-1)}{2}\right).$$