Université de Provence 2006–2007

Ateliers de mathématiques

Lundi 13 novembre

Groupes

Exercice 1. On définit une loi de composition, qu'on notera $*$, en posant

$$\forall a, b \in]-1;1[,\ a * b = \frac{a+b}{1+ab}.$$

Montrer que $]-1;1[$ est un groupe abélien pour la loi $*$

(indication: pour démontrer que $*$ est une loi interne, on déterminera le signe de $1 + a * b$ et celui de $1 - a * b$ pour $a, b \in]-1;1[$).

1) Montrons que $*$ est une loi interne dans l'intervalle $]-1;1[$, c'est à dire que $a * b$ appartient à $]-1;1[$ quels que soient a et b dans cet intervalle. En suivant l'indication de l'énoncé,

$$1 + a * b = 1 + \frac{a+b}{1+ab} = \frac{1+ab+a+b}{1+ab} = \frac{(1+a)(1+b)}{1+ab} > 0$$

$$1 - a * b = 1 - \frac{a+b}{1+ab} = \frac{1+ab-a-b}{1+ab} = \frac{(1-a)(1-b)}{1+ab} > 0$$

(parce que $1+a$, $1+b$, $1+ab$, $1-a$ et $1-b$ sont strictement positifs pour tout a et b dans $]-1;1[$). On déduit de ces deux inégalités que $a * b > -1$ et $a * b < 1$, c'est à dire $a * b$ appartient bien à $]-1;1[$.

2) Vérifions que $*$ est une loi commutative:

$$b * a = \frac{b+a}{1+ba} = \frac{a+b}{1+ab} = b * a$$

(compte tenu qu'on sait déjà que $b + a = a + b$ et $ba = ab$).

3) Vérifions que $*$ est une loi associative, en calculant

$$(a * b) * c = \frac{a+b}{1+ab} * c = \frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \frac{a+b}{1+ab}c} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$$

et

$$a * (b * c) = \frac{a + (b * c)}{1 + a(b * c)} = \frac{a + \frac{b+c}{1+bc}}{1 + a\frac{b+c}{1+bc}} = \frac{a+abc+b+c}{1+bc+ab+ac}.$$

Ils sont égaux et la loi $*$ est associative.

4) Vérifions que la loi $*$ admet un élément neutre, c'est à dire qu'il existe un élément $e \in]-1;1[$ tel que $a * e = e * a = a$ pour tout $a \in]-1;1[$:

- L'égalité $a * e = e * a$ est vraie puisqu'on a vérifié que la loi $*$ est commutative.
- L'égalité $e * a = a$ est vraie si $e = 0$ puisque $0 * a = \dfrac{0+a}{1+0a} = a$.
- De plus 0 appartient à $]-1;1[$.

Donc 0 est élément neutre (inutile de chercher tous les éléments neutres, puisqu'un théorème du cours dit qu'il ne peut pas en exister plusieurs).

5) Vérifions que tout élément $a \in]-1;1[$ admet un symétrique pour la loi $*$, c'est à dire qu'il existe un élément $a' \in]-1;1[$ tel que $a * a' = a' * a = e$:

_ L'égalité $a * a' = a' * a$ est vraie puisqu'on a vérifié que la loi $*$ est commutative.

_ L'égalité $a' * a = e$ est vraie si $a' = -a$ puisque $(-a) * a = \dfrac{-a + a}{1 + (-a)a} = 0$ et $0 = e$.

_ De plus $-a$ appartient à $]-1;1[$ pour tout a dans cet intervalle.

Donc $-a$ est un symétrique de a pour la loi $*$ (inutile de chercher tous les symétriques de a, puisqu'un théorème du cours dit qu'il ne peut pas en exister plusieurs).

On conclut que $]-1;1[$ est un groupe pour la loi $*$ c'est à dire (dans l'intervalle $]-1;1[$) cette loi est interne, associative, admet un élément neutre et tout élément de $]-1;1[$ admet un symétrique. De plus $]-1;1[$ est un groupe abélien pour la loi $*$, ce qui veut dire que c'est un groupe et que la loi $*$ est commutative.