

## Corrigé de la feuille 4

Une intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  est dite généralisée si  $a$  ou  $b$  est infini, ou si  $f$  n'est pas définie en  $a$  ou en  $b$ . Si on connaît une primitive  $F$  de la fonction  $f$  alors  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - \lim_{x \rightarrow a} F(x)$  (si ces limites existent et sont finies). Si on ne connaît pas de primitive de  $f$  il faut comparer la valeur absolue de  $f$  à une autre fonction dont on connaît la primitive, pour savoir si l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  existe; on dit alors qu'elle est convergente.

1. a) La fonction qu'on veut intégrer entre 0 et 3, c'est à dire la fonction  $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ , n'est pas définie en  $x = 3$ ; on écrit donc

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{c \rightarrow 3} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \\ &= \lim_{c \rightarrow 3} \left[ \arcsin \left( \frac{x}{3} \right) \right]_0^c \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- b) Faisons de même avec la fonction  $\frac{1}{2-x}$  (pas définie en  $x = 2$ ); cette fois-ci sa primitive  $-\ln(2-x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 2, on dit alors que l'intégrale  $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$  diverge.

- c) L'intégrale  $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$  est divergente parce que

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{c \rightarrow 1} \int_0^c \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{c \rightarrow 1} \left[ -\frac{1}{x-1} \right]_0^c = +\infty.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} &= \lim_{\substack{c \rightarrow 1 \\ c < 1}} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\substack{d \rightarrow 1 \\ d > 1}} \int_d^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \\ &= \lim_{\substack{c \rightarrow 1 \\ c < 1}} \left[ \frac{(x-1)^{2/3}}{2/3} \right]_0^c + \lim_{\substack{d \rightarrow 1 \\ d > 1}} \left[ \frac{(x-1)^{2/3}}{2/3} \right]_d^4 \\ &= \frac{3^{2/3} - 1}{2/3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{dx}{x^2+4} \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right]_0^c \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \int_{-\infty}^2 e^{2x} dx &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^2 e^{2x} dx \\
&= \lim_{c \rightarrow -\infty} \left[ \frac{e^{2x}}{2} \right]_c^2 \\
&= \frac{e^4}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \int_1^{+\infty} \sqrt{x} dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \sqrt{x} dx \\
&= \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^c \\
&= +\infty, \text{ l'intégrale diverge.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\cosh x} = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{dx}{2\cosh x} + \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_0^d \frac{dx}{2\cosh x} \\
&= \lim_{c \rightarrow -\infty} [\arctan(e^x)]_c^0 + \lim_{d \rightarrow +\infty} [\arctan(e^x)]_0^d \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } \int_a^{+\infty} e^{-x} \sin x dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c e^{-x} \sin x dx \\
&= \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x}{2} \right]_a^c \\
&= \frac{e^{-a} \cos a + e^{-a} \sin a}{2}.
\end{aligned}$$

3. L'intégrale  $I = \int_0^\pi \text{Log}(\sin u) du$  est calculable (c'est le but de cet exercice), bien que la primitive de  $\text{Log}(\sin u)$  ne le soit pas.

a) Comme  $\text{Log}(\sin u)$  n'est pas défini en  $u = 0$  ni en  $u = \pi$ , on écrit

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \text{Log}(\sin u) du + \int_{\pi/2}^\pi \text{Log}(\sin u) du \\
&= \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^{\pi/2} \text{Log}(\sin u) du + \lim_{c \rightarrow 0} \int_{\pi/2}^{\pi-c} \text{Log}(\sin u) du.
\end{aligned}$$

Cependant ces deux dernières intégrales sont égales (ce qu'on peut voir en faisant le changement de variable  $u = \pi - t$ ), il suffit donc de calculer la première.

Pour démontrer l'existence de  $\lim_{c \rightarrow 0} \int_c^{\pi/2} \text{Log}(\sin u) du$ , c'est à dire la convergence de

l'intégrale impropre  $\int_0^{\pi/2} \text{Log}(\sin u) du$ , on utilise le critère 2 de la proposition 8.3.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Log}(\sin u)}{\text{Log} u} &= \frac{\text{Log}\left(\frac{\sin u}{u} u\right)}{\text{Log} u} \\
&= \frac{\text{Log}\left(\frac{\sin u}{u}\right) + \text{Log} u}{\text{Log} u} \\
&= \frac{1}{\text{Log} u} \text{Log}\left(\frac{\sin u}{u}\right) + 1
\end{aligned}$$

où  $\frac{\sin u}{u}$  tend vers 1 et  $\text{Log} u$  vers  $-\infty$ , donc  $\lim_{u \rightarrow 0} \left| \frac{\text{Log}(\sin u)}{\text{Log} u} \right| = 1$ , ce qui implique (pour  $u$  assez proche de 0)

$$\left| \frac{\text{Log}(\sin u)}{\text{Log} u} \right| \leq 2 \Rightarrow |\text{Log}(\sin u)| \leq 2|\text{Log} u|.$$

Le critère s'applique et  $\int_0^{\pi/2} \text{Log}(\sin u) \, du$  converge.

L'intégrale  $\int_{\pi/2}^{\pi} \text{Log}(\sin u) \, du = \lim_{c \rightarrow 0} \int_{\pi/2}^{\pi-c} \text{Log}(\sin u) \, du$  converge aussi (par le changement de variable  $u = \pi - t$ ), vers la même limite.

b) La relation  $\int_0^{\pi/2} \text{Log}(\sin u) \, du = \int_0^{\pi/2} \text{Log}|\cos t| \, dt$  s'obtient par le changement de variable  $u = \frac{\pi}{2} - t$ . L'intégrale de  $\pi/2$  à  $\pi$  (de chacune des deux fonctions  $\text{Log}(\sin u)$  et  $\text{Log}|\cos u|$ ) est égale à son intégrale de 0 à  $\pi/2$  donc

$$I = \int_0^{\pi} \text{Log}|\cos u| \, du.$$

c) En faisant  $u = 2t$  on obtient  $I = 2 \int_0^{\pi/2} \text{Log}|\sin(2t)| \, dt$ . On a aussi  $\int_{\pi/2}^{\pi} \text{Log}|\sin(2x)| \, dx = \int_0^{\pi/2} \text{Log}|\sin(2t)| \, dt$  (par le changement de variable  $x = \frac{\pi}{2} + t$ ), et on déduit de ces deux égalités

$$I = \int_0^{\pi} \text{Log}|\sin(2u)| \, du.$$

d) Compte tenu que  $|\sin(2u)| = 2 \sin u |\cos u|$  (pour  $u \in [0, \pi]$ ) et compte tenu des questions précédentes,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \text{Log}(2 \sin u |\cos u|) \, du \\ &= \int_0^{\pi} (\text{Log} 2 + \text{Log}(\sin u) + \text{Log}|\cos u|) \, du \\ &= \pi \text{Log} 2 + I + I \end{aligned}$$

d'où  $\boxed{I = -\pi \text{Log} 2}$ .

4. a) L'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{\text{Log}^\alpha t}{t^\beta} \, dt$  diverge si  $\beta \leq 1$  parce qu'on a  $\frac{\text{Log}^\alpha t}{t^\beta} \geq \frac{\text{Log}^\alpha 2}{t^\beta}$  avec

$\text{Log}^\alpha 2$  constante strictement positive, et on sait que  $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$  diverge.

Vérifions que l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{\text{Log}^\alpha t}{t^\beta} \, dt$  converge si  $\beta > 1$ : on sait que  $\text{Log} t \leq t^\varepsilon$  pour  $t$  assez grand, où on peut choisir la constante  $\varepsilon$  aussi petite qu'on veut. On

la choisit de sorte que  $\beta - \alpha\varepsilon > 1$ ; on a alors  $\frac{\text{Log}^\alpha t}{t^\beta} \leq \frac{1}{t^{\beta-\alpha\varepsilon}}$  avec  $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta-\alpha\varepsilon}}$

convergente, donc  $\int_2^{+\infty} \frac{\text{Log}^\alpha t}{t^\beta} \, dt$  est aussi convergente.

b) Dans l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Log}(1+t^\alpha)}{t^\beta} dt$  il y a deux intégrales généralisées, qui sont

$$\int_0^1 \frac{\text{Log}(1+t^\alpha)}{t^\beta} dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\text{Log}(1+t^\alpha)}{t^\beta} dt.$$

Pour la première on utilise l'équivalent  $\text{Log}(1+t^\alpha) \sim t^\alpha$ , c'est à dire les inégalités  $t^\alpha(1-\varepsilon) \leq \text{Log}(1+t^\alpha) \leq t^\alpha(1+\varepsilon)$  pour  $t$  voisin de 0. On se ramène donc à l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\beta-\alpha}}, \text{ qui converge si et seulement si } \beta - \alpha < 1 \text{ c'est à dire } \beta < \alpha + 1.$$

Pour la deuxième intégrale on procède comme à la question a), en utilisant les inégalités  $1 \leq \text{Log}(1+t^\alpha) \leq t^\varepsilon$  pour  $t$  assez grand.

Donc  $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Log}(1+t^\alpha)}{t^\beta} dt$  converge si et seulement si  $1 < \beta < \alpha + 1$ .

$$\text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx + \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx.$$

Pour la première intégrale on utilise la même méthode qu'à la question b): quand  $x$  tend vers 0,  $\sin x$  est équivalent à  $x$  et  $x^\alpha(1+x^\beta) = x^\alpha + x^{\alpha+\beta}$  est équivalent au terme de plus bas degré donc

$$\frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} \sim \begin{cases} \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}} & \text{si } \beta \geq 0 \\ \frac{x}{x^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{x^{\alpha+\beta-1}} & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

On conclut que  $\int_0^a \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx$  converge si et seulement si  $\begin{cases} \alpha < 2 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} \alpha + \beta < 2 \\ \beta < 0 \end{cases}$ .

Pour démontrer la convergence de  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx$ , on se débarrasse de  $\sin x$  (qui n'est pas de signe constant) en intégrant par parties avec  $F' = \sin x$  et  $G = \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ .

Comme  $F = -\cos x + \text{constante}$ , on choisit la constante égale à 1 de façon que  $F = -\cos x + 1$  soit positive. On obtient

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx = \int_a^c F'G = [FG]_a^c - \int_a^c FG'. \quad (1)$$

On considère d'abord le cas où au moins une des deux constantes  $\alpha$  ou  $\alpha + \beta$  est strictement positive; alors  $x^\alpha(1+x^\beta) = x^\alpha + x^{\alpha+\beta}$  tend vers  $+\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , ce qui fait que le terme entre crochets dans (1) tend vers 0 quand  $c \rightarrow +\infty$ . Le dernier terme dans (1), c'est à dire  $-\int_a^c FG' = \int_a^c F(-G')$ , est une fonction croissante

de  $c$  parce que  $F \geq 0$  et  $-G' = \frac{\alpha + \beta x^\beta}{(x^\alpha + x^{\alpha+\beta})^2} \geq 0$  pour  $x \geq a$  (en choisissant  $a$  assez grand). D'autre part on a  $F \leq 2$  donc

$$\begin{aligned} \int_a^c F(-G') &\leq \int_a^c 2(-G') = [2(-G)]_a^c \\ &= -2G(c) + 2G(a) \\ &\leq 2G(a) \end{aligned}$$

et par conséquent  $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c F(-G')$  est fini. Tout ceci permet de déduire de (1) que

l'intégrale  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx$  converge.

Il reste à vérifier que  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx$  diverge si  $\alpha \leq 0$  et  $\alpha + \beta \leq 0$ : dans ce cas on a  $x^\alpha(1+x^\beta) = x^\alpha + x^{\alpha+\beta} \leq 2$  et par conséquent

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx \geq \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{2} dx = 1.$$

Cette inégalité empêche la fonction  $\phi(c) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx$  de converger vers une limite finie  $L$  quand  $c \rightarrow +\infty$ : si c'était le cas,  $\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx = \phi(2k\pi + \pi) - \phi(2k\pi)$  tendrait vers  $L - L = 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

En regroupant toutes ces conditions sur  $\alpha$  et  $\beta$  on conclut que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx$  converge si et seulement si  $-\beta < \alpha < 2$  ou  $0 < \alpha < 2 - \beta$ .

5. Si on veut appliquer la formule de la moyenne (théorème 6.5) il faut supposer en plus des hypothèses de l'énoncé que la fonction  $g$  est positive (l'inégalité de la moyenne

$$\inf\{f(x)\} \cdot \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq \sup\{f(x)\} \cdot \int_a^b g$$

est fausse si  $g$  n'est pas de signe constant, voir par exemple le cas  $g(x) = \sin x$  avec  $f(x) = e^{-x}$  et  $[a, b] = [2k\pi, 2k\pi + 2\pi]$ .

Supposons donc d'abord que  $g$  est positive. D'après la formule de la moyenne on a pour tout  $c \geq a$

$$\int_a^c fg \leq \sup\{f(x)\} \cdot \int_a^c g \leq f(a)M$$

puisque la fonction  $f$  (supposée décroissante) a pour maximum  $f(a)$ , et l'intégrale  $\psi_g(c) = \int_a^c g$  est supposée bornée par une constante  $M$  indépendante de  $c$ . Ceci

prouve que la fonction (croissante)  $H(c) = \int_a^c fg$  converge vers une limite finie quand  $c \rightarrow +\infty$ , c'est à dire  $\int_a^{+\infty} fg$  converge.

Si on ne suppose pas  $g$  positive, la convergence de  $\int_a^{+\infty} fg$  peut néanmoins être démontrée sans utiliser la formule de la moyenne, mais en utilisant la méthode d'intégration par parties de l'exercice 4 c), dans le cas où  $f$  est dérivable:

$$\begin{aligned} \int_a^c fg &= [f\psi_g]_a^c - \int_a^c f'\psi_g \\ &= f(c)\psi_g(c) - f(a)\psi_g(a) + \int_a^c (-f')\psi_g \end{aligned}$$

converge quand  $c \rightarrow +\infty$  vers  $0 - f(a)\psi_g(a) + \int_a^{+\infty} (-f')\psi_g$ , cette dernière intégrale convergeant du fait que  $|(-f')\psi_g|$  est majoré par  $|(-f')M| = (-f')M$ , dont l'intégrale de 0 à  $+\infty$  vaut  $f(a)M$ .

6. La fonction  $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$  est définie pour  $\alpha \in ]1, +\infty[$ ; par contre si  $\alpha = 1$  elle ne l'est pas (sa valeur est infinie).

Soit  $\alpha_0 \in ]1, +\infty[$ , on veut démontrer qu'elle est continue en  $\alpha_0$ . On applique le théorème 10.7, non pas sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ , mais sur un intervalle fermé  $[\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon]$  inclus dans  $]1, +\infty[$ . Alors les trois conditions du théorème sont vérifiées:

- Pour  $\alpha \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon]$  fixé, la fonction (positive)  $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$  est intégrable (elle est inférieure à  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ , dont on sait qu'elle est intégrable de 0 à  $+\infty$ );
- pour  $t \in [0, +\infty[$  fixé, la fonction  $\alpha \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$  est continue;
- Pour  $\alpha \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon]$ , la fonction (positive)  $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$  est majorée par une fonction intégrable indépendante de  $\alpha$ : c'est la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha_0 - \varepsilon}}$ .

Calculons maintenant cette intégrale. Si  $\alpha$  est un nombre rationnel  $\frac{p}{q}$ , le changement de variable  $t = u^q$  donne

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{qu^{q-1}}{1+u^p} du,$$

et on s'aperçoit que le cas  $p$  pair est préférable au cas  $p$  impair (si  $p$  est impair le polynôme  $1+u^p$  a une racine réelle). Cependant il existe toujours  $p$  et  $q$  pairs tels que  $\alpha = \frac{p}{q}$ : s'ils ne le sont pas, on remarque que  $\frac{p}{q} = \frac{2p}{2q}$  puis on remplace  $p$  par  $2p$  et  $q$  par  $2q$ .

Après cette opération,  $p$  est pair et par conséquent le polynôme  $1+u^p$  a  $p$  racines complexes conjuguées deux à deux qu'on appelle  $u_0, u_1, \dots, u_{\frac{p}{2}-1}, \overline{u_0}, \overline{u_1}, \dots, \overline{u_{\frac{p}{2}-1}}$ .

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle  $\frac{P(u)}{Q(u)} = \frac{qu^{q-1}}{1+u^p}$  est

$$\begin{aligned} \frac{P(u)}{Q(u)} &= \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \frac{P(u_k)/Q'(u_k)}{u - u_k} + \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \frac{P(\overline{u_k})/Q'(\overline{u_k})}{u - \overline{u_k}} \\ &= \frac{2q}{p} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \Re \left( \frac{u_k^{q-p}}{u - u_k} \right) \\ &= -\frac{q}{p} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \Re \left( u_k^q \frac{2u - u_k - \overline{u_k}}{(u - u_k)(u - \overline{u_k})} + u_k^q \frac{u_k - \overline{u_k}}{(u - u_k)(u - \overline{u_k})} \right) \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation  $z + \bar{z} = 2\Re(z)$  (= deux fois la partie réelle de  $z$ ) pour tout nombre complexe  $z$ , et on a remplacé  $u_k^p$  par  $-1$  puisque  $1+u_k^p = 0$ . La première fraction appartient à  $\mathbb{R}$  et son numérateur est la dérivée de son dénominateur; sa primitive est donc un logarithme. La primitive de la deuxième fraction est un arctangente (voir formulaire du cours). Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(u)}{Q(u)} du = -\frac{q}{p} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \left[ \Re(u_k^q) \operatorname{Log} |u - u_k|^2 - 2\Im(u_k^q) \arctan \frac{u - \Re(u_k)}{\Im(u_k)} \right]_{u=0}^{u \rightarrow +\infty}. \quad (*)$$

Remarquons que la somme  $\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \Re(u_k^q) \operatorname{Log} |u - u_k|^2$  est nulle en  $u = 0$  puisque

$$\operatorname{Log} |-u_k|^2 = \operatorname{Log} 1 = 0; \text{ et que, pour } u \rightarrow +\infty, \text{ elle est équivalent à } \operatorname{Log} \left( u \left( \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \Re(u_k^q) \right) \right),$$

qui tend aussi vers 0 quand  $u \rightarrow +\infty$ : pour s'en convaincre il suffit de calculer la

racine  $u_k$ , qui vaut  $e^{i(2k+1)\pi/p}$ , puis la somme géométrique  $\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} u_k^q$  qui vaut 0. Donc dans l'expression (\*) le terme en logarithme est nul.

Le terme en arctangente est la partie imaginaire de  $\frac{2q}{p} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} u_k^q \left( \pi - \frac{\pi}{p} - \frac{2\pi}{p}k \right)$ , c'est donc la somme d'une somme géométrique (nulle) et d'une somme géométrique-dérivée. En utilisant les formules  $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{(a - 1)^2}$  et  $\sum_{k=0}^{n-1} k a^k = \frac{(n-1)a^{n+1} - na^n + a}{(a - 1)^2}$  on obtient  $\frac{2q}{p} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} u_k^q \left( \pi - \frac{\pi}{p} - \frac{2\pi}{p}k \right) = \frac{i\pi q/p}{\sin(\pi q/p)}$  c'est à dire

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}.$$

Cette relation se prolonge par continuité à tout réel  $\alpha > 1$ , puisque  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$  et  $\frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$  sont des fonctions continues de  $\alpha$ .

7. L'intégrale  $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$  converge parce que  $0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$  avec  $1 - x < 1$ .  
L'intégrale  $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  converge parce qu'on a (pour  $t$  assez grand)

$$0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq e^{-t} e^{\frac{t}{2}} = e^{-\frac{t}{2}}.$$

$\Gamma(x+1)$  se calcule en intégrant par parties, avec  $F'(t) = e^{-t}$  et  $G(t) = t^x$ .

$\Gamma(n) = (n-1)!$  pour  $n$  entier, se déduit de  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  par récurrence.

Le théorème 10.8 permet de dire que la fonction  $\Gamma$  est dérivable en tout  $x_0 \in ]0, +\infty[$  puisque, en localisant  $x$  dans l'intervalle  $\left[\frac{x_0}{2}, 2x_0\right]$  par exemple on a:

- \_ la fonction (positive)  $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  est Lebesgue-intégrable pour  $t \in [0, +\infty]$ , c'est à dire elle et sa valeur absolue sont intégrables;
- \_ la fonction  $x \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  est dérivable;
- \_ sa dérivée, qui vaut  $e^{-t} t^{x-1} \text{Log} t$ , est majorée en valeur absolue par une fonction Lebesgue-intégrable qui ne dépend pas de  $x$ : c'est la fonction  $t \mapsto e^{-t} t^{\max(x_0/2-1, 2x_0-1)} \text{Log} t$ .

8. La fonction  $\frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}$  tend vers  $x$  quand  $t \rightarrow 0$ ; on peut donc la considérer comme une fonction continue (qui vaut  $x$  en  $t = 0$ ). Son intégrale de 0 à  $+\infty$  converge d'après le critère 1 de la proposition 8.2 parce que  $\left| \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} \right| \leq \frac{\pi/2}{t^3}$ .

On la dérive en appliquant le théorème 10.8. Sa dérivée  $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} dt$

vaut  $\left[ \frac{x \arctan(tx) - \arctan(t)}{x^2 - 1} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{\pi/2}{|x| + 1}$  donc

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{Log}(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{Log}(-x+1) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

9. Le développement en série entière de la fonction  $\text{Log} \frac{1}{1-t} = -\text{Log}(1-t)$  est

$$-\text{Log}(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$$

et, par le théorème de convergence monotone,

$$\int_0^x \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^x \frac{t^n}{n} dt \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Dans le cas  $x = 1$  la somme  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)}$  se calcule par élimination, du fait que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ et elle vaut } 1 - \frac{1}{N+1}. \text{ D'où } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 = \int_0^1 \text{Log} \frac{1}{1-t} dt.$$