Université d'Aix-Marseille I **Licence de Mathématiques, L2**
Faculté des sciences, Saint-Charles **Intégration 1, 2004-2005**

Corrigé des exercices de soutien

1. **Énoncé:** Soit δ la jauge définie sur $[0,1]$ par

$$\delta(0) = \frac{1}{2},\ \delta(t) = t \text{ si } t \neq 0.$$

Déterminer si les subdivisions suivantes sont ou non δ-fines :

$$\mathcal{P}_1 = \{([0,1/4],0),([1/4,1/2],1/2),([1/2,1],3/4)\},$$
$$\mathcal{P}_2 = \{([0,1/4],0),([1/4,1/2],1/2),([1/2,1],3/5)\},$$
$$\mathcal{P}_3 = \{([0,1/4],0),([1/4,1/2],1/2),([1/2,1],1/2)\}.$$

Calculer les sommes de Riemann $S(f,\mathcal{P})$ pour les trois subdivisions ci-dessus et $f(x) = x^3$.

Solution: Seule $\mathcal{P}_1$ est δ-fine: l'intervalle $[1/2,1]$ est inclus dans $\left[t_3 - \frac{\delta(t_3)}{2},\ t_3 + \frac{\delta(t_3)}{2}\right]$ si t_3 vaut $3/4$, mais pas s'il vaut $3/5$ ni $1/2$.

$S(f,\mathcal{P}_1) = \sum_{i=1}^{3} |I_k| f(t_k) = \frac{1}{4}0^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{31}{128}.$

Pour calculer $S(f,\mathcal{P}_2)$, remplacer $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ par $\left(\frac{3}{5}\right)^3$, et pour calculer $S(f,\mathcal{P}_3)$, remplacer $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ par $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

2. **Énoncé:** Reprendre l'exercice précédent avec la jauge définie par

$$\delta(0) = \frac{1}{2},\ \delta(t) = \frac{9}{8}t \text{ si } 0 < t \leq 1/2,\ \delta(t) = \frac{3}{4}t \text{ si } 1/2 < t \leq 1.$$

Solution: Seule $\mathcal{P}_1$ est δ-fine.

3. **Énoncé:** Soit f la fonction nulle partout sur $]0,1]$ et égale 3 en 0. Montrer que f est intégrable, et donner la valeur de son intégrale.

Solution: Voir corrigé de la planche 2 (exercice 4).

4. **Énoncé:** Soit k la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$k(x) = n \text{ si } x = 1/n, n \in \mathbb{N}^*,\ k(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que k est intégrable d'intégrale nulle.

Solution: Voir corrigé de la planche 2 (exercice 5).

5. **Énoncé:** Montrer, en construisant une suite de fonctions en escalier qui la minorent, que la fonction

$$f(0) = 0, f(x) = 1/x^2, x \neq 0$$

n'est pas intégrable sur $[0, 1]$.

Solution: La fonction f est supérieure à la fonction g_n définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} 4^n & \text{si } \frac{1}{2^{n+1}} \leq x < \frac{1}{2^n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet pour $\frac{1}{2^{n+1}} \leq x < \frac{1}{2^n}$ on a $x^2 < \frac{1}{4^n}$ donc $\frac{1}{x^2} > 4^n$.

Mais $\int_0^1 g_n(x)\, dx$ vaut $\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) 4^n = 2^{n-1}$. Comme 2^{n-1} tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$, on conclut que f n'est pas intégrable sur $[0, 1]$.

6. **Énoncé:** Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et f une fonction continue par morceaux sur I. Montrer que f est intégrable au sens de Riemann, au sens où l'on peut se restreindre aux jauges constantes. En déduire que si f est de signe constant et d'intégrale nulle, elle est nulle en tout point où elle est continue.

Solution: Voir corrigé de la planche 2 (exercice 8).

7. **Énoncé:** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On définit g sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} f(t)\, dt.$$

   (a) Montrer que g se prolonge par continuité en 0.

   (b) Montrer que si f est périodique, alors $g(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$.

Solution: En posant $g_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$, on a $g(x) = g_1(x^2)$. Les propriétés de g_1 sont étudiées dans le corrigé de la planche 2 (exercice 11), et celles de g s'en déduisent.

8. Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \sin x\, dx, \ \int (x^3 + x + 2) e^x\, dx.$$

Solution: En intégrant par parties on obtient $\int e^x \sin x\, dx = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + C$ et $\int (x^3 + x + 2) e^x\, dx = (x^3 - 3x^2 + 7x - 5) e^x + C$.

9. **Énoncé:** À l'aide de changements de variables, calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+3x}+\sqrt[3]{2+3x}}\,dx,\ (t=\sqrt[6]{2+3x}),$$

$$\int \frac{1}{((x-1)^2-9)^2}\,dx,\ (u=\frac{x-1}{3}),$$

$$\int (\arccos x)^2\,dx,\quad \int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx.$$

Solution: On obtient

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+3x}+\sqrt[3]{2+3x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2+3x}\ -\sqrt[3]{2+3x}\ +2\sqrt[6]{2+3x}\ -2\mathrm{Log}\left|1+\sqrt[6]{2+3x}\right|+C,$$

$$\int \frac{1}{\left((x-1)^2-9\right)^2}\,dx = \frac{1}{108}\left(-\frac{3}{x+2}-\frac{3}{x-4}+\mathrm{Log}|x+1|-\mathrm{Log}|x-4|\right)+C,$$

$$\int (\arccos x)^2\ dx\ = x(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x+C,$$

$$\int x^2\sqrt{1+x^3}\ dx = \frac{2}{9}\sqrt{(1+x^3)^3}+C.$$

10. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$\frac{x^5+1}{x(x-1)^3},\ \frac{1}{(x^4+1)^2},\ \frac{x}{x^4+x^2+1},$$

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)},\ \frac{2x}{(1-x+x^2)^2},\ \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}.$$

Solution: Voir corrigé de la planche 3 (exercice 8), sauf pour $\int \frac{x^5+1}{x(x-1)^3}\,dx = \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}+7\mathrm{Log}|x-1|-ln|x|+C.$

11. **Énoncé:** Soit f_n la fonction définie par $f_n(x)=x^{2n}\sqrt{\cosh(x/n)}$ sur $[-1,1]$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement, mais pas uniformément, sur $[-1,1]$, vers une fonction limite f que l'on déterminera. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} f_n(t)\,dt=0.$$

Solution: Elle ne peut pas converger uniformément parce que, si c'était le cas, sa limite serait une fonction continue; or

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \text{ ou } -1 \end{cases}$$

est une fonction discontinue. Cependant on peut appliquer le théorème de convergence dominée, $|f_n(x)|$ étant inférieur à la fonction constante 2 qui est évidemment indépendante de n et intégrable sur $[-1,1]$. Ainsi on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right)\, dx = 0.$$

12. **Énoncé:** On pose $I = [0,1]$ et on y définit la suite de fonctions suivante :

$$f_k(x) = \mathbf{1}_{[1/k,2/k]}.$$

(a) Montrer que f_k converge simplement vers 0 sur I, mais pas uniformément.

(b) Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_k(t)\, dt = 0.$$

(c) Pour tout k, on pose $g_k = kf_k$. Montrer que g_k converge simplement vers 0, mais pas uniformément.

(d) Calculer la limite des intégrales de g_k sur I.

(e) Montrer que la suite (g_k) ne vérifie pas les hypothèses du théorème de convergence dominée. Que dire du lemme de Fatou?

Solution:

(a) Il s'agit de démontrer que, pour tout $x \in I$ fixé, on a $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = 0$. Or c'est vrai pour $x = 0$ puisque tous les $f_k(0)$ sont nuls ($0 \notin [1/k, 2/k]$). Si $x \neq 0$ on a $0 \notin [1/k, 2/k]$ pour tout $k > 2/x$ donc même conclusion, $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = 0$.

Cette limite n'est pas uniforme: $\sup_{x\in I} |f_k(x) - 0|$ vaut 1 et ne tend pas vers 0.

(b) $\lim_{k\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_k(t)\, dt = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0.$

(c) Même démonstration que pour f_k.

(d) $\lim_{k\to+\infty} \int_{-1}^{1} g_k(t)\, dt = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k} = 1.$

(e) La suite (g_k) ne peut pas vérifier les hypothèses du théorème de convergence dominée: si elle les vérifiait on aurait
$\lim_{k\to+\infty}\int_{-1}^{1} g_k(t)\,dt = \int_{-1}^{1}\left(\lim_{k\to+\infty} g_k(t)\right)\,dt = \int_{-1}^{1} 0\,dt = 0.$
Le lemme de Fatou ne dit rien d'intéressant:
$\int_{-1}^{1}\left(\lim_{k\to+\infty} g_k(t)\right)\,dt \le \lim_{k\to+\infty}\int_{-1}^{1} g_k(t)\,dt$ c'est à dire $0 \le 1$.

13. **<u>Énoncé:</u>** Donner un énoncé du théorème de convergence dominée pour les fonctions absolument intégrables.

    <u>Solution:</u> Si au lieu de supposer que les f_n sont des fonctions intégrables, on suppose qu'elles sont absolument intégrables, on a (sous les mêmes hypothèses) $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |f_n(x)|\,dx = \int_a^b\left(\lim_{n\to+\infty}|f_n(x)|\right)\,dx.$

14. **<u>Énoncé:</u>** Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ on a

$$\int_0^x \log\frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

    et que la relation est encore vraie pour $x = 1$.

    <u>Solution:</u> Voir corrigé de la planche 5 (exercice 9).

15. **<u>Énoncé:</u>** Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Log}n\sin x}{x+\mathrm{Log}n}\,dx,\ \lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^\pi e^{-\alpha\cos x}\,dx,\ \lim_{\alpha\to 0}\int_0^\pi e^{-\alpha\cos x}\,dx,\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\mathrm{Log}n\sin x}\,dx$$

    <u>Solution:</u> La fonction $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{Log}n\sin x}{x+\mathrm{Log}n}$ est comprise entre 0 et $\sin x$ pour $x \in [0,\pi]$. Elle tend vers $\sin x$ pour x fixé et $n \to +\infty$. Donc d'après le théorème de convergence dominée, son intégrale tend vers $\int_0^\pi \sin x\ dx = 2.$

    La fonction $g_\alpha(x) = e^{-\alpha\cos x}$ est comprise entre $e^{\alpha/2}$ et e^α quand $x \in \left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$. Son intégrale est donc supérieure à $\dfrac{\pi}{3}e^{\alpha/2}$ (pour $\alpha \ge 0$) et par conséquent elle tend vers $+\infty$ quand $\alpha \to +\infty$.

    La fonction $g_\alpha(x) = e^{-\alpha\cos x}$ est comprise entre 0 et e pour $x \in [0,\pi]$ et $\alpha \in [-1,1]$. Elle tend vers 1 pour x fixé et $\alpha \to 0$. Donc d'après le théorème de convergence dominée, son intégrale tend vers $\int_0^\pi 1\ dx = \pi.$

La dernière intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\operatorname{Log} n \ \sin x}\, dx$ vérifie la relation suivante:
en posant $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x}\, dx$ on a $I_n = \dfrac{J_n}{\operatorname{Log} n}$ et

$$\begin{aligned} J_{n+2} - J_n &= \int_0^\pi \frac{\sin((n+2)x) - \sin(nx)}{\sin x}\, dx \\ &= \int_0^\pi \frac{2\ \sin x\ \cos((2n+2)x)}{\sin x}\, dx \\ &= \int_0^\pi 2\cos((2n+2)x)\ dx \\ &= \left[\frac{2\sin((2n+2)x)}{2n+2}\right]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $J_{2k} = J_0 = 0$ et $J_{2k+1} = J_1 = \pi$.
Il s'ensuit que $I_{2k} = 0$ et $I_{2k+1} = \dfrac{\pi}{\operatorname{Log}(2k+1)}$, et la limite de I_n est nulle.

16. **<u>Énoncé:</u>** Montrer que la fonction

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(tx)}{t(1+t^2)}\, dt$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (avec $\tanh\theta = \dfrac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$).

<u>Solution:</u> Voir corrigé de la planche 5 (exercice 8), dans lequel le numérateur est $\arctan(tx)$. Ici le numérateur est $\tanh(tx)$, et la dérivée de $\tanh(tx)$ par rapport à x (c'est à dire $t(1 - \tanh^2(tx))$) est comprise entre 0 et t.