Espaces vectoriels (résumé de cours)

1) Définition: Un espace vectoriel sur un corps K (K = R ou C) est un ensemble E muni de deux lois de composition notées + et $\cdot$, telles que (pour tout $v, w, x \in E$ et $\lambda, \mu \in$ K)

$$(1)\quad \begin{cases} v + w = w + v \\ v + (w + x) = (v + w) + x \\ \exists\ 0_E \in E,\ v + 0_E = 0_E + v = v \\ \exists\ v' \in E,\ v + v' = v' + v = 0_E \end{cases}$$

(2) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

(3) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

(4) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$

(5) $1 \cdot v = v$.

2) Trois exemples:

• R^3, ensemble des triplets de réels $v = (x, y, z)$, est un espace vectoriel sur R pour les deux lois de composition définies par

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$
$$\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathrm{R}.$$

• $\mathrm{R}_2[X]$, ensemble des polynômes $aX^2 + bX + c$ de degré au plus 2, à coefficients a, b et c réels, est un espace vectoriel sur R pour l'addition des polynômes et la multiplication par un réel λ.

• $\mathcal{M}_{2,2}(\mathrm{R})$, ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients réels, est un espace vectoriel sur R pour les deux lois de composition définies par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$
$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

3) Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E.

C'est un sous-ensemble $F \subseteq E$ qui contient l'élément neutre 0_E, et qui est stable par les deux lois de composition c'est à dire

(6) $v + w \in F$ (pour tout $v \in F$ et $w \in F$)

(7) $\lambda \cdot v \in F$ (pour tout $\lambda \in$ K et $v \in F$).

Remarquons que si F vérifie ces conditions, il est lui-même un espace vectoriel sur K. La somme de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 est

$F_1 + F_2 =$ ensemble des $v_1 + v_2$, pour $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$. On note $F_1 \oplus F_2$ (somme directe de F_1 et F_2) la somme $F_1 + F_2$ dans le cas où $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E lorsque $F_1 \oplus F_2 = E$.

4) Systèmes de vecteurs $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. On dit qu'un vecteur v est combinaison linéaire de

v_1, v_2,..., v_n s'il existe des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de K tels que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n \ .$$

_ On appelle sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}$, l'ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires de v_1, v_2,..., v_n ._ On dit que $\mathcal{S}$ est un système de générateurs de E, si E est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires de v_1, v_2,..., v_n ._ On dit que $\mathcal{S}$ est un système libre si l'équation $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = 0_E$ n'a pas d'autre solution que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Sinon (c'est à dire s'il a une solution avec au moins un des λ_k non nul), on dit que $\mathcal{S}$ est lié._ On dit que $\mathcal{S}$ est une base de E si c'est à la fois un système de générateurs de E et un système libre. _ Trois exemples de bases canoniques:

- Celle de R^3 est constituée par les trois vecteurs

$e_1 = (1,0,0)$
$e_2 = (0,1,0)$
$e_3 = (0,0,1)$.
Remarquons que tout vecteur (x,y,z) est égal à $x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$.

- Celle de $\mathrm{R}_2[X]$ est constituée par les trois polynômes 1, X et X^2.
- Celle de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathrm{R})$ est constituée par les quatre matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5) Dimension d'un espace vectoriel.

C'est le nombre de vecteurs de base.
Par exemple la dimension de R^3 ou de $\mathrm{R}_2[X]$ est 3, puisque leurs bases canoniques ont trois éléments; la dimension de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathrm{R})$ est 4.
La dimension du sous-espace vectoriel $\{0_E\}$ est 0 (par convention)._ Théorèmes sur la dimension:

Si E est de dimension n, alors
_ dans toute base de E il y a n vecteurs;
_ tout système de n générateurs de E, est une base de E;
_ tout système libre de n vecteurs de E, est une base de E;
_ tout sous-espace vectoriel de E est de dimension au plus n; s'il est de dimension n, il est égal à E. _

Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels:

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) \ .$$

6) Applications linéaires.

Une application $f : E \to F$ (avec E et F espaces vectoriels) est dite linéaire lorsque, pour tout $v, w \in E$ et $\lambda \in \mathrm{K}$,
$f(v+w) = f(v) + f(w)$
$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$._ Une application linéaire $f : E \to F$ est appelée

isomorphisme si elle est bijective

endomorphisme si $E = F$

automorphisme si elle est bijective et $E = F$._ Le noyau de f (noté Ker$f$) est l'ensemble des $v \in E$ tels que $f(v) = 0_F$._ Théorème: f est injective si et seulement si Ker$f = \{0_E\}$

(c'est à dire Ker$f$ n'a pas d'autre élément que l'élément neutre de E)._ L'image de f (notée Imf ou $f(E)$) est l'ensemble des $f(v)$, quand v parcourt E._ Le rang de f est la dimension de Imf._ Théorème noyau-image:

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) \\ &= \dim(\mathrm{Ker} f) + \mathrm{rang}(f). \end{aligned}$$

_ Conséquence:

f injective $\Leftrightarrow$ rang$(f) = \dim E$

f surjective $\Leftrightarrow$ rang$(f) = \dim F$.

7) Matrice d'une application linéaire.

Exemple en dimension 3:

Soit $f : E \to F$ linéaire

$\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ une base de E

$\mathcal{B}' = \{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3\}$ une base de F.

La notation $\mathcal{M}at(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ signifie qu'on a les relations

$f(\epsilon_1) = a_1\epsilon'_1 + a_2\epsilon'_2 + a_3\epsilon'_3$

$f(\epsilon_2) = b_1\epsilon'_1 + b_2\epsilon'_2 + b_3\epsilon'_3$

$f(\epsilon_3) = c_1\epsilon'_1 + c_2\epsilon'_2 + c_3\epsilon'_3$ .On peut aussi représenter ces relations par le tableau

$$\begin{pmatrix} f(\epsilon_1) & f(\epsilon_2) & f(\epsilon_3) & \\ a_1 & b_1 & c_1 & \epsilon'_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \epsilon'_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \epsilon'_3 \end{pmatrix}$$

8) Matrices de passage.

Exemple en dimension 3:

On dit que $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de $\{e_1, e_2, e_3\}$ à $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ (bases d'un même espace vectoriel E) si on a les relations

$\epsilon_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$

$\epsilon_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$

$\epsilon_3 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$. On peut représenter ces relations par le tableau

$$\begin{matrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \\ a_1 & b_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & e_3 \end{matrix}$$

9) Matrices et coordonnées.

Soit $f : E \to F$ linéaire, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. On obtient les coordonnées de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}'$ en effectuant le produit matriciel

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

où $A = \mathcal{M}at(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, et $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$. - De même, si P est la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ dans un même espace vectoriel E, les coordonnées de tout vecteur v dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont liées par la relation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

10) Produits de matrices et composées d'applications linéaires.

Soient $f : E \to F$ et g: $F \to G$ deux applications linéaires.

- Théorème: Si $\mathcal{M}at(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A$ et $\mathcal{M}at(g, \mathcal{B}', \mathcal{B}'') = B$, alors $\mathcal{M}at(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = BA$.

Une matrice carrée A est dite inversible s'il existe une matrice, notée A^{-1}, telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

- Théorème: f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $A = \mathcal{M}at(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est inversible; dans ce cas, on a $\mathcal{M}at(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = A^{-1}$.

11) Matrices d'une application linéaire dans des bases différentes.

Si $A = \mathcal{M}at(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et $B = \mathcal{M}at(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'{}_1)$, si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}'_1$, on a la relation

$$B = Q^{-1}AP.$$

12) Calcul du rang d'un système.

On appelle rang de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

On ne change pas le rang de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ si on remplace un de ses vecteurs, par exemple v_1 , par une combinaison linéaire

$$v_1' = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

à condition que $\lambda_1 \neq 0$.
On ne change pas non plus son rang si on permute ses vecteurs. _ Système échelonné:

Le rang du système $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est égal à n si les coordonnées $\alpha_{1,j}$, $\alpha_{2,j}$, $\ldots$, $\alpha_{m,j}$ de chaque v_j dans une base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m\}$, vérifient

$$\alpha_{j,j} \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{i,j} = 0 \quad \text{pour tout i > j}$$

ou si elles vérifient

$$\alpha_{j,j} \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{i,j} = 0 \quad \text{pour tout i < j.}$$

On peut représenter ce système par le tableau

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \quad \text{(dans le premier cas)} \quad \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ \\ \alpha_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \ldots & \alpha_{m,n} \end{array} \quad \text{(dans le second).}$$