Université de Provence — 2010–2011

Mathématiques Générales I

Durée : quatre heures. Calculettes interdites.

Seul document autorisé : tableau de primitives.

Examen dérogatoire 2011

Première Partie

– I –

1. Quelle est la condition sur l'entier n pour qu'il existe un graphe simple à n sommets de degré 2 ?
2. Existe-t-il un graphe à quatre sommets de degré 3 ? à cinq sommets de degré 3 ?

– II–

Représenter tous les graphes simples non connexes à six sommets et deux composantes connexes, tels que chacune des composantes connexes soit un graphe planaire (c'est à dire dont les arêtes ne se coupent pas) et complet.

– III –

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Soit A un sous-ensemble de E, et B un sous-ensemble de F.

1. Démontrer que $g(f(A) \cap B)$ est inclus dans $g(f(A)) \cap g(B)$.
2. Trouver deux applications f_0 et g_0 telles que cette inclusion ne soit pas une égalité.
3. Comparer $g(f(A) \cup B)$ et $g(f(A)) \cup g(B)$.

– IV –

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 4 - 2i = 0$.

– V –

Soit (D) l'ensemble des points $M(k)$ de l'espace, de coordonnées $(2 - 4k, 3, 1 + 6k)$ (pour tout réel k).
Soit (D') l'ensemble des points $M'(h)$ de l'espace, de coordonnées $(2 + 3h, 1, 1 + 2h)$ (pour tout réel h).

1. Les droites (D) et (D') sont-elles orthogonales ?
2. Déterminer k et h de façon que la distance de $M(k)$ à $M'(h)$ soit minimale.

– VI –

Déterminer une équation paramétrique de la droite d'équation cartésienne

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z + 2 = 0 \\ 4x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

sous la forme $\begin{cases} x = at + b \\ y = ct + d \\ z = t \end{cases}$

Deuxième Partie

– VII –

Calculer les primitives suivantes et préciser sur quel intervalle elles sont définies :

$$\text{a) } \int (\cos^2(x) + \cos(2x))dx, \quad \text{b) } \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx, \quad \text{c) } \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

– VIII –

On considère l'équation différentielle :

$$xy'(x) - y(x) = 2x^3 \tag{E}$$

1. Calculer la solution générale de l'équation différentielle homogène (e) associée.
2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation non-homogène (E).
3. En déduire la solution de (E) qui vérifie $y(1) = 0$.

– IX –

On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 2x^2 + 6x + 4 \tag{$\mathcal{E}$}$$

1. Calculer la solution générale de l'équation différentielle homogène (h) associée.
2. Chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré.
3. Trouver une solution de $(\mathcal{E})$ qui vérifie $y(0) = y'(0) = 1$.

– X –

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.
Etudier la fonction f : déterminer son ensemble de définition, calculer sa dérivée, étudier ses variations, rechercher ses limites, sa tangente au point $x = 0$ et tracer sa représentation graphique.

– XI –

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 1cm, on considère les points A_0, A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 2$.

1. On rappelle que toute similitude directe S associe au point d'affixe z le point d'affixe $z' = az + b$, où a et b sont des constantes indépendantes de $z \in \mathbb{C}$. Déterminer a et b de façon que $S(A_0) = A_2$ et $S(A_1) = A_3$.
2. Déterminer le rapport (positif), l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.