Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales I

Énoncé et corrigé

Durée : quatre heures. Calculettes interdites.

Seul document autorisé : tableau de primitives.

Examen dérogatoire 2011

Première Partie

– I –

1. Quelle est la condition sur l'entier n pour qu'il existe un graphe simple à n sommets de degré 2 ?

   Réponse : $n \geq 3$.

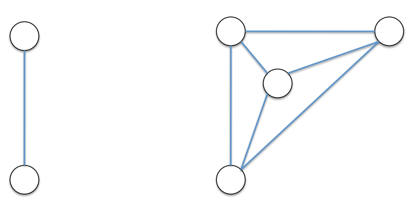
2. Existe-t-il un graphe à quatre sommets de degré 3 ? à cinq sommets de degré 3 ?

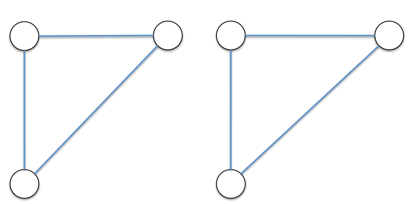
Réponse : Oui, le graphe complet à quatre sommets. Non, la somme des degrés des sommets serait impaire.

– II–

Représenter tous les graphes simples non connexes à six sommets et deux composantes connexes, tels que chacune des composantes connexes soit un graphe planaire (c'est à dire dont les arêtes ne se coupent pas) et complet.

Réponse : Il y en a deux :





– III –

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Soit A un sous-ensemble de E, et B un sous-ensemble de F.

1. Démontrer que $g(f(A) \cap B)$ est inclus dans $g(f(A)) \cap g(B)$.

   Réponse : Les éléments de $g(f(A) \cap B)$ sont les $g(x)$, pour tous les x qui appartiennent à la fois à $f(A)$ et à B. Ils sont donc dans $g(f(A)) \cap g(B)$.

2. Trouver deux applications f_0 et g_0 telles que cette inclusion ne soit pas une égalité.

   Réponse : $f_0(x) = x$ et $g_0(x) = x^2$ avec $E = F = G = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}^-$ et $B = \mathbb{R}^+$, car $g_0(f_0(A) \cap B) = \{0\}$ et $g_0(f_0(A)) \cap g_0(B) = \mathbb{R}^+$.

3. Comparer $g(f(A) \cup B)$ et $g(f(A)) \cup g(B)$.

   Réponse : Les éléments de $g(f(A) \cup B)$ sont les $g(x)$, pour tous les x qui appartiennent à $f(A)$ ou à B. Ils sont donc dans $g(f(A)) \cup g(B)$.

   Réciproquement tout élément de $g(f(A)) \cup g(B)$ est un $g(x)$ avec $x \in f(A)$, ou un $g(x)$ avec $x \in B$, cet élément appartient donc à $g(f(A) \cup B)$.

   Ceci prouve l'égalité $g(f(A) \cup B) = g(f(A)) \cup g(B)$.

– IV –

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

   Réponse : Le discriminant vaut -16 et les solution de l'équation sont $1 - 2i$ et $1 + 2i$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 4 - 2i = 0$.

   Réponse : Le discriminant vaut $8i - 15$, qui est le carré de $1 + 4i$, et les solution de l'équation sont $-2i$ et $1 + 2i$.

– V –

Soit (D) l'ensemble des points $M(k)$ de l'espace, de coordonnées $(2 - 4k, 3, 1 + 6k)$ (pour tout réel k).
Soit (D') l'ensemble des points $M'(h)$ de l'espace, de coordonnées $(2 + 3h, 1, 1 + 2h)$ (pour tout réel h).

1. Les droites (D) et (D') sont-elles orthogonales ?

   Réponse : Oui puisque leurs vecteurs directeurs $(-4, 0, 6)$ et $(3, 0, 2)$ sont orthogonaux.

2. Déterminer k et h de façon que la distance de $M(k)$ à $M'(h)$ soit minimale.

   Réponse : $k = h = 0$ puisque la longueur du segment $M(k)M'(h)$ est $\sqrt{(3h + 4k)^2 + (-2)^2 + (2h - 6k)^2} = 13h^2 + 4 + 52k^2$.

– VI –

Déterminer une équation paramétrique de la droite d'équation cartésienne

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z + 2 = 0 \\ 4x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

sous la forme $\begin{cases} x = at + b \\ y = ct + d \\ z = t \end{cases}$

Réponse : $\begin{cases} x = -\frac{7}{18}t - \frac{13}{18} \\ y = -\frac{4}{9}t - \frac{1}{9} \\ z = t \end{cases}$

Deuxième Partie

– VII –

Calculer les primitives suivantes et préciser sur quel intervalle elles sont définies :

$$\text{a) } \int (\cos^2(x) + \cos(2x))dx, \qquad \text{b) } \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx, \quad \text{c) } \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Réponse :

a) $\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\sin(2x)$+constante ($x \in \mathbb{R}$), b) $\frac{1}{2}\arcsin(x^2)$+constante ($x \in [-1, 1]$), b) $\sqrt{1+x}$+constante ($x \in [-1, +\infty[$).

– VIII –

On considère l'équation différentielle :

$$xy'(x) - y(x) = 2x^3 \qquad (E)$$

1. Calculer la solution générale de l'équation différentielle homogène (e) associée.

   Réponse : $y(x) = Cx$ avec C constante.

2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation non-homogène (E).

   Réponse : $y(x) = x^3$.

3. En déduire la solution de (E) qui vérifie $y(1) = 0$.

   Réponse : $y(x) = x^3 + Cx$ vérifie $y(1) = 0$ si $C = -1$, on a donc $y(x) = x^3 - x$.

– IX –

On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 2x^2 + 6x + 4 \qquad (\mathcal{E})$$

1. Calculer la solution générale de l'équation différentielle homogène (h) associée.

   Réponse : $y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$ avec A et B constantes.

2. Chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré.

   Réponse : $y(x) = x^2$.

3. Trouver une solution de $(\mathcal{E})$ qui vérifie $y(0) = y'(0) = 1$.

   Réponse : $y(x) = x^2 + e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$ vérifie $y(0) = y'(0) = 0$ si $A = 1$ et $B = 2$, on a donc $y(x) = x^2 + e^{-x}(\cos x + 2\sin x)$.

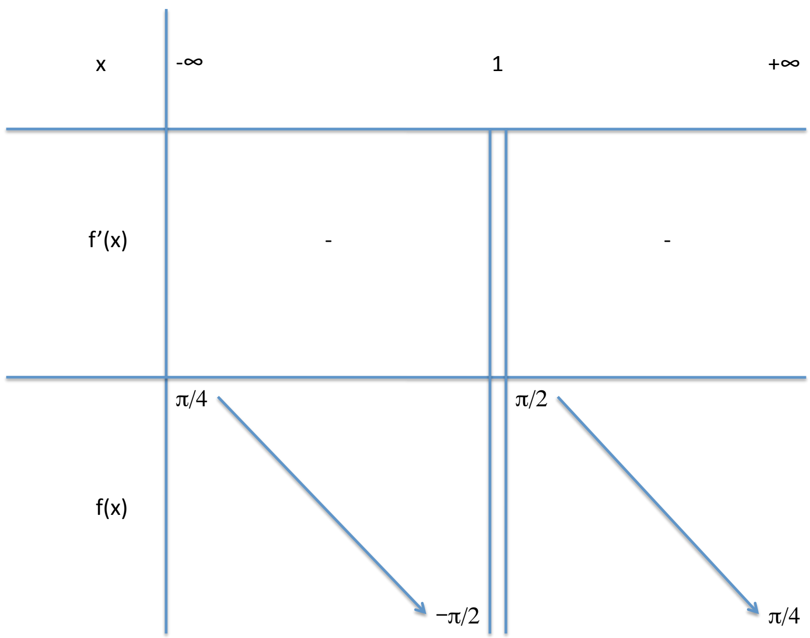
– X –

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.
Etudier la fonction f : déterminer son ensemble de définition, calculer sa dérivée, étudier ses variations, rechercher ses limites, sa tangente au point $x = 0$ et tracer sa représentation graphique.
Réponse : Elle est définie sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ puisqu'en $x = 1$ le dénominateur s'annule.

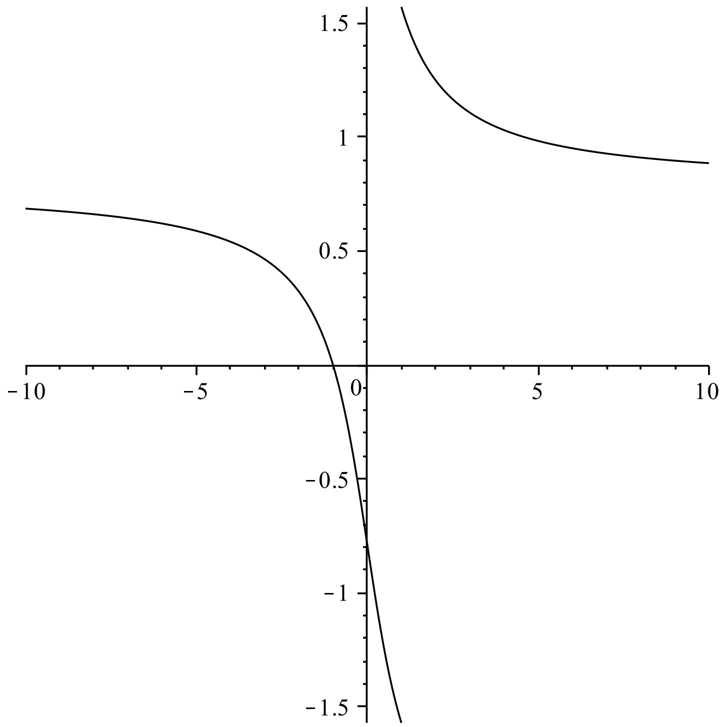
Remarquons que $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1+2}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ a pour dérivée $\dfrac{-2}{(x-1)^2}$. La dérivée de $f(x)$ est donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \\ &= -\frac{2}{(x-1)^2+(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Les limites de $f(x)$ sont $-\dfrac{\pi}{2}$ quand $x \to 1^-$, $\dfrac{\pi}{2}$ quand $x \to 1^+$ et $\dfrac{\pi}{4}$ quand $x \to \pm\infty$.



La tangente à la courbe de f au point $x = 0$ a pour pente $-\dfrac{1}{0^2+1} = -1$, c'est donc la droite d'équation $y = -x - \dfrac{\pi}{4}$.



– XI –

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 1cm, on considère les points A_0, A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 2$.

1. On rappelle que toute similitude directe S associe au point d'affixe z le point d'affixe $z' = az + b$, où a et b sont des constantes indépendantes de $z \in \mathbb{C}$. Déterminer a et b de façon que $S(A_0) = A_2$ et $S(A_1) = A_3$.

   Réponse : $\left\{ \begin{array}{l} a + b = 2i \\ ai + b = 2 \end{array} \right. \Rightarrow a = -2$ et $b = 2 + 2i$.

2. Déterminer le rapport (positif), l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

   Réponse : Le rapport est 2, l'angle est π et l'affixe, obtenu en résolvant $z = az + b$, est $\dfrac{2+2i}{3}$.