:

Exercices UE21

Martine Quinio

14 décembre 2012

1 Exercices

Exercice 1.1 *On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite ; On dispose de tests de dépistage de la maladie : Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.*

Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1) Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?

2) Quelle est la probabilité pour une personne d'être sain si son test est positif ?

3) Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?

4) Quelle est la probabilité pour une personne d'être sain si son test est négatif ?

1.1 Exercices loi normale

Exercice 1.2 *Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre : On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obeit à une loi normale de paramètres :*

moyenne : 0mm, écart-type : 0.02mm ; on rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm.

Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Exercice 1.3 *La consommation d'un abonné EDF en heure de pointe suit une loi normale de paramêtres* $m = 5kW$, *et* $\sigma = 1kW$; *sur un secteur de 1000 abonnés, calculer la puissance minimale que doit fournir EDF pour que la demande soit satisfaite avec une probabilité d'au moins 99% ?*

Exercice 1.4 *Sur un grand nombre de personnes, on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :*

- 56% *ont un taux inférieur à* 165 *cg ;*

- 34% *ont un taux compris entre* 165*cg et* 180 *cg ;*

- *Les autres ont un taux supérieur à* 180 *cg.*

1) Calculer la moyenne m *et l'écart type ;*

2) Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10000 *personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de* 182 *cg ?*

Exercice 1.5 *Sur une ligne de bus, on estime que le retard en minutes sur l'horaire est une variable aléatoire R qui suit une loi normale N(m ; σ)*

On admet que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est p=84,1% et que le retard moyen est 5 minutes :

1) Calculer σ

2) Quelle est la probabilité pour que le retard dépasse 9 minutes ?

3) Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité d'attendre encore moins de 4 minutes ?

4) Un étudiant prend ce bus tous les matins pendant 100 jours ; on suppose les retards journaliers indépendants

Soit X la variable aléatoire « nombre de matins parmi 100 où il attend moins de 7 minutes »

Quelle est la loi de probabilité de X , son espérance, sa variance

5) Lassé des retards de bus, il décide de prendre le bus ou le tram selon le protocole :

Le premier jour, il prend le bus

Si le jour n il a attendu plus de 7 minutes, le jour suivant il prend le tram ; sinon, il prend le bus le jour suivant

Si le jour n il prend le tram, le jour suivant il prend bus ou tram de façon équiprobable.

On note P(n) la probabilité de l'événement « L'étudiant prend le bus le jour n »

a) Montrer que :

$$P(n+1) = (p - \frac{1}{2})P(n) + \frac{1}{2}$$

b) Etudier la suite $(P(n))$

1.2 Exercices loi normale et TCL

Exercice 1.6 *Sur un trajet en train (heure donnée, jour donné) Paris-Marseille, le retard moyen est de 10mn ; on considère que le retard est une variable aléatoire R d'espérance (en mn) 10 et decart-type : 3.*

1) On considère que la loi de R est une loi normale :
Calculez $P[5 < R < 15]$.

2) Le trajet durant 3h, donner un intervalle de confiance 95% du retard et donc du temps du trajet.

3) La loi de R est inconnue ; on étudie plusieurs trajets, on note R_i la variable aléatoire "retard" sur le trajet numéro i. On suppose les variables aléatoires R_i indépendantes, de m{eme loi, de paramètres donnés dans la question 1. Soit X la variable aléatoire "retard moyen sur n trajets", $n \geq 100$. Quelle est la loi de X ?

4) Donner un intervalle de confiance 95% du retard moyen sur 100 trajets.

Exercice 1.7 *Dans cet exercice, on considère des courses cyclistes avec plus ou moins de participants et d'étapes. . .*

Les parties A, B, C sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 200 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 200, participe à une course cycliste qui comprend 20 étapes ; aucun abandon n'est constaté.

À la fin de chaque étape, un groupe de 10 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 10 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 10 coureurs ?

2) À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 200 participants.

Montrer que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est p=0,05.

3) On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 20 étapes de la course.

a). Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

b). On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : il a été contrôlé 2 fois exactement

B : il n'a pas été contrôlé ;

C : il a été contrôlé au moins une fois.

c) Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de X ?

Reprendre alors les questions 3a et 3b et comparer les résultats.

Partie B

Cette fois la course cycliste comprend 40 étapes et comporte 40 coureurs ;

A la fin de chaque étape, un groupe de 10 coureurs est choisi au hasard pour subir le contrôle antidopage.

À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 40 participants.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape ?

2) On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 40 étapes de la course.

a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ? Préciser ses paramètres.

b) Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de Y ?

2 Solutions exercices

Solution 2.1 *Test hépatite*

1) la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif :
C'est P(M/T⁺) =P(T⁺/M)P(M)/P(T⁺)

$P(T^+) = P(T^+/M)P(M) + P(T^+/S)P(S) = 0.95 * 0.03 + 0.1 * 0.97 = 0.125\,5$

D'où : $P(M/T^+) = 23.7\%$

2) la probabilité pour une personne d'être sain si son test est positif :
C'est $P(S/T^+) = 1 - P(M/T^+) = 76.3\%$

3) la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif :
C'est $P(M/T^-) = 0.0017$

4) la probabilité pour une personne d'être sain si son test est négatif :
C'est $1 - P(M/T^-) = 0.998 = 99.8\%$

Solution 2.2 *Billes*

La probabilité qu'une bille soit rejetée est, en notant D la variable aléatoire "diamètre", $p = 1 - P[7.97 \leq D \leq 8.03]$

Or $P[7.97 \leq D \leq 8.03] = P[-\frac{0.03}{0.02} \leq \frac{D-8}{0.02} \leq \frac{0.03}{0.02}] = \Pi(1.5) - \Pi(-1.5) = 0.866\,4$:

La proportion de billes rejetées est donc $p = 13.4\%$.

Solution 2.3 *Soigner*

Si X est de moyenne m et d'écart-type σ, alors $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ *suit une loi centrée réduite.*

Donc, si $P[X \leq 165]$, *alors,* $P[\dfrac{X-m}{\sigma} \leq \dfrac{165-m}{\sigma}] = 0.56$:

Or, on peut lire dans la table de Gauss $F(0.15) = 0.5596$;

De même, si $P[X \geq 180]$, *alors :* $P[\dfrac{X-m}{\sigma} \geq \dfrac{180-m}{\sigma}] = 0.1$:

Donc, $P[\dfrac{X-m}{\sigma} \leq \dfrac{180-m}{\sigma}] = 0.9$

et l'on peut lire de même : $F(1.28) = 0.8997$.

Pour trouver m et σ, il suffit de résoudre le système d'équations :

$\dfrac{165-m}{\sigma} = 0.15$ *et* $\dfrac{180-m}{\sigma} = 1.28$: $\sigma \simeq 13.27$; $m \simeq 163$ *cg.*

Alors,

$P[X \geq 182] = P[\dfrac{X-m}{\sigma} \geq \dfrac{182-m}{\sigma}] = 1 - \Pi(1.43) = 0.0764$:

Sur 10000 *personnes, estimer un nombre de personnes à soigner de l'ordre de* 764 *personnes ; en fait, la théorie de l'estimation donnera une fourchette*

Solution 2.4 *EDF*

On cherche a pour que

$$P[\sum_{k=0}^{1000} X_i \leq a] \geq 0.99$$

Posons $Y = \sum_{k=0}^{1000} X_i$:

$E(Y) = 5000$

$\sigma(Y) = \sqrt{1000}$

Soit $P[(Y-5000)/\sqrt{1000} \leq (a-5000)/\sqrt{1000}] \geq 0.99$

Soit par lecture inverse de table :

$(a-5000)/\sqrt{1000} = 2.33$

$a = 5000 + 2.33 * \sqrt{1000} \simeq 5073.7$

Donc la puissance minimale que doit fournir EDF pour que la demande soit satisfaite avec une probabilité d'au moins 99% est de 5074kW

Solution 2.5 *Bus*

1) Calcul de σ *:*

A l'aide de la table de Gauss, on obtient facilement : $\sigma \simeq 2$

2) La probabilité pour que le retard dépasse 9 minutes est

$P[R > 9] = 1 - \Pi(\frac{2}{\sigma})) \simeq 0.023$

3) Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, la probabilité d'attendre encore moins de 4 minutes est :

$P_{[R\geq 3]}[R \leq 7] = \dfrac{P([R \leq 7] \cap [R \geq 3])}{P[R \geq 3]} = \dfrac{P([3 \leq R \leq 7])}{P[R \geq 3]} = \dfrac{2\Pi(\frac{2}{\sigma}) - 1}{\Pi(\frac{2}{\sigma})} \simeq 0.811$

4) Soit X la variable aléatoire « nombre de matins parmi 100 où il attend moins de 7 minutes »

La loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres $n = 100, p = 0.841$

$$P[X = k] = \binom{100}{k} (0.841)^k (0.159)^{100-k}$$

Son espérance est $np = 84.1$*, sa variance* $np(1-p) = 13.37$

5) On note P(n) la probabilité de l'événement « L'étudiant prend le bus le jour n »

On peut faire un arbre des possibilités et on obtient :

$P(n+1) = pP(n) + \frac{1}{2}(1 - P(n))$

D'où :

$$P(n+1) = (p - \frac{1}{2})P(n) + \frac{1}{2}$$

b) Etude de la suite $(P(n))$ *:*

Si elle converge la limite vérifie : $l = (p - \frac{1}{2})l + \frac{1}{2}$ *:*

Donc $l = 0.758$ *:*

On pose $l = 0.758$

Puis, on a :$(P(n+1) - l) = (p - \frac{1}{2})(P(n) - l)$

Ce qui montre que la suite géométrique $(P(n) - l)$ *converge vers 0, et donc :*

c) La suite $(P(n))$ *est convergente et sa limite est* $l = 0.758$.

Solution 2.6 *Trains*

1) La variable aléatoire (R-10)/3 $(R-10)/3$ *suit une loi normale centrée Y réduite :* $P[5 < R < 15] = P[(5-10)/3 < (R-10)/3 < (15-10)/3] = 2F(5/3) - 1 = 90.4\%$.

2) Comme Y est centrée réduite, $P[-1.96 < Y < 1.96] = 0.95$. *un intervalle de fluctuation 95% du retard est en mn,* $[10 - 1.96 * 3; 10 + 1.96 * 3] = [4; 16]$ *3) La loi de X est une loi normale dspérance 10, decart-type* $3/\sqrt{n}$. *4) Un intervalle de fluctuation 95% du retard* *moyen sur 100 trajets est donc :* $[10 - 1.96 * 3/\sqrt{n}; 10 + 1.96 * 3/\sqrt{n}] = [9mn24; 10mn36]$. *La précision est bien meilleure !*

Solution 2.7 *Course vélo*

Partie A

1) On peut former $\binom{200}{10}$*groupes différents de 10 coureurs, soit environ 2.25* 10^{16}

2) La probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est $p = \frac{10}{200} = 0,05$.

3) On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 20 étapes de la course.

a). la loi de probabilité de la variable aléatoire X est la loi binomiale de paramètres n=20, p=0.05

L'espérance est E(X)=np=1, VarX=np(1-p)=0.95

b). On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : il a été contrôlé 2 fois exactement :

$P(A) = \binom{20}{2} 0.05^2 0.95^{18} \simeq 0.189$

B : il n'a pas été contrôlé ;

$P(B) = \binom{20}{0} 0.95^{20} \simeq 0.358$

C : il a été contrôlé au moins une fois.

$P(C) = 1 - P(B) \simeq 0.642$

Partie B

1) La probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est $p = \frac{10}{40}$

2) a) la loi de probabilité de la variable aléatoire Y est la loi binomiale de paramètres $n = 40, p = 0.25$

L'espérance est $E(X) = np = 10, VarX = np(1-p) = 7.5$

b) on paut approcher la loi de Y par la loi normale de paramètre m=10, $\sigma = \sqrt{7.5}$