Intégration I

Licence de mathématiques, 4^{e} semestre
Université Aix-Marseille 1

J-Y. Briend

Fascicule de résultats

1 Intégrabilité, intégrale

Définition 1.1. — *Soit* $\mathrm{I} = [a, b]$ *un intervalle compact. Une subdivision pointée* $\mathcal{P}$ *de* I *est la donnée d'une subdivision* $\mathrm{I}_1 = [x_0, x_1], \mathrm{I}_2 = [x_1, x_2], \dots, \mathrm{I}_n = [x_{n-1}, x_n]$ *de* I *(avec* $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$*) et d'un « pointage » de cette partition, c.-à.-d. des points* $t_1 \in \mathrm{I}_1, \dots, t_n \in \mathrm{I}_n$*. On la notera* $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \dots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$*, et on appellera les* t_i *des points de marquage de* $\mathcal{P}$*.*

Définition 1.2. — *Soient* f *une fonction numérique* quelconque *définie sur l'intervalle* $[a, b]$*, et* $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \dots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$ *une subdivision pointée de* $[a, b]$*. On appelle somme de Riemann de* f *associée à* $\mathcal{P}$ *la quantité :*

$$\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{I}_k| f(t_k).$$

Définition 1.3. — *Un pas, ou* jauge, *est une fonction* δ *définie sur* $[a, b]$ *et à valeurs dans* $]0, +\infty[$*. Une subdivision pointée* $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \dots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$ *sera dite adaptée au pas, ou encore* δ*-fine, si, pour tout* $1 \leq k \leq n$ *on a*

$$\mathrm{I}_k \subseteq [t_k - \frac{\delta(t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(t_k)}{2}].$$

On remarque en particulier que $|\mathrm{I}_k| \leq \delta(t_k)$*.*

Définition 1.4. — *Soit* f *une fonction numérique définie sur* $[a, b]$*. La fonction* f *est dite intégrable s'il existe un nombre réel* S *tel que, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une jauge* δ_ε *sur* $[a, b]$ *telle que, pour toute subdivision* δ_ε*-fine* $\mathcal{P}$*, on ait*

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \mathrm{S}| < \varepsilon.$$

On notera $\mathcal{I}([a, b])$ *l'ensemble des fonctions intégrables sur* $[a, b]$*. Le nombre* S *ci-dessus est appelé intégrale de la fonction* f *sur* $[a, b]$ *et est noté*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ou encore } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ voire } \int_{[a,b]} f \text{ ou } \int_a^b f.$$

Lemme 1.1 (Lemme de Cousin). — *Pour toute jauge* $\delta > 0$ *sur* $[a, b]$*, il existe une subdivision* δ*-fine.*

Théorème 1.1 (Critère de Cauchy). — *Une fonction* $f : \mathrm{I} = [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *est intégrable si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une jauge* δ_ε *telle que, si* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *sont deux subdivisions* δ_ε*-fines, alors*

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \mathrm{S}(f, \mathcal{Q})| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.5. — *On dit que* f *est Lebesgue-intégrable sur* $[a, b]$ *si* f *et* $|f|$ *sont intégrables.*

2 Propriétés élémentaires

Théorème 2.1. — *Une fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable (et même Riemann-intégrable : on peut se limiter aux jauges δ_ε constantes sur $[a, b]$).*

Théorème 2.2 (Linéarité). — *Si f et g sont des fonctions intégrables sur I, et si λ est un nombre réel, alors $f + g$ et λf sont intégrables, et l'on a les identités*

$$\int_{\mathrm{I}} (f+g) = \int_{\mathrm{I}} f + \int_{\mathrm{I}} g \text{ et } \int_{\mathrm{I}} \lambda f = \lambda \int_{\mathrm{I}} f.$$

Théorème 2.3 (positivité). — *Si $f \in \mathcal{I}(\mathrm{I})$ vérifie $f \geq 0$, alors*

$$\int_{\mathrm{I}} f \geq 0.$$

En particulier, si $f, g \in \mathcal{I}(\mathrm{I})$ vérifient $f \geq g$, alors

$$\int_{\mathrm{I}} f \geq \int_{\mathrm{I}} g.$$

Théorème 2.4 (Relation de Chasles). — *Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ et $c \in]a, b[$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si, et seulement si, ses restrictions à $[a, c]$ et $[c, b]$ le sont. Dans ce cas, on a la relation*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

C'est pourquoi l'on note aussi l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ sous la forme

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

3 Formule fondamentale du calcul différentiel et intégral

Théorème 3.1. — *Soit $\mathrm{F} : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur $[a, b]$ (c.-à.-d. dérivable sur $]a, b[$ et admettant en a (resp. en b) une dérivée à droite (resp. à gauche)), de dérivée f. Alors f est intégrable et l'on a*

$$\int_a^b f = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$; on sait, comme l'intégrale a la propriété de restriction aux sous-intervalles, que f est intégrable sur $[a, x]$ pour tout $x \in [a, b]$, et l'on peut donc définir

$$\psi_f(x) = \int_a^x f, \ x \in [a, b].$$

Théorème 3.2 (Primitive des fonctions continues). — *Toute fonction continue f admet une primitive, égale à une constante près à ψ_f.*

Théorème 3.3 (Intégration par parties). — *Soient F et G deux fonctions dérivables sur $[a, b]$. Alors $\mathrm{F}'\mathrm{G}$ est intégrable si et seulement si $\mathrm{F}\mathrm{G}'$ l'est. Dans ce cas, on a la formule*

$$\int_a^b \mathrm{F}'\mathrm{G} = [\mathrm{F}\mathrm{G}]_a^b - \int_a^b \mathrm{F}\mathrm{G}'.$$

Théorème 3.4 (Changement de variable). — *Soient g une application dérivable sur l'intervalle compact $[a, b]$, et f une fonction admettant une primitive sur l'intervalle $g([a, b])$. Alors*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3.5 (Formule de la moyenne). — *Soient f, g deux fonctions définies sur $[a, b]$. On suppose f, g et fg intégrables, g positive, et f bornée. Alors*

$$\inf\{f(x), x \in [a,b]\} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \sup\{f(x), x \in [a,b]\} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si de plus f est continue, alors il existe un point $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Corollaire 3.1. — *Si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in]a, b[$ telle que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c).$$

4 Calcul de primitives

Remarque : pour cette partie, refaire les exercices des travaux dirigés.
Primitives usuelles :

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + \mathrm{C},\ \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}\,|x| + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{e}^{(a+ib)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+ib}\mathrm{e}^{(a+ib)x} + \mathrm{C},\ a+ib \neq 0 \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + \mathrm{C} \qquad \int \tan x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{Log}\,|\cos x| + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}\,|sinx|| + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\,x + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}\,|\tan x| + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\,x + \mathrm{C} \qquad \int \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\,x + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{th}\,x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}\,\mathrm{ch}\,x + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{\mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}\left|\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\right| + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}\,x}\,\mathrm{d}x = 2\arctan(\mathrm{e}^x) + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{\mathrm{th}\,x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}\,|\mathrm{sh}\,x| + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{th}\,x + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = -\coth x + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}\,|\mathrm{th}\,x| + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\mathrm{Log}\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{|a|} + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Log}\,|x+\sqrt{x^2-a^2}| + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+a)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a\sqrt{x^2+a}} + \mathrm{C} \qquad \int \frac{1}{(a-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a\sqrt{a-x^2}} + \mathrm{C},\ a \neq 0$$

Fractions Rationnelles :

Théorème 4.1 (Décomposition en éléments simples). — *Soient P et Q deux polynômes à coefficients complexes sans racine commune. Soient $a_1, \ldots, a_r$ les pôles de P/Q. Alors il existe un* *polynôme* E*, des nombres entiers* $\alpha_i \in \mathbf{N}^*, 1 \leq i \leq r$ *(*α_i *est appelé multiplicité du pôle* a_i*), et des nombres complexes* $\mathrm{A}_{j,k}, 1 \leq k \leq r, 1 \leq j \leq \alpha_k$*, tels que*

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \mathrm{E}(x) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{\mathrm{A}_{j,k}}{(x-a_k)^j}.$$

Fractions rationnelles en *sinus* **et** *cosinus* **:** soient P et Q deux polynômes de deux variables, à coefficients réels. On cherche à intégrer une fonction de la forme $\mathrm{P}(\cos x, \sin x)/\mathrm{Q}(\cos x, \sin x)$, et pour celà on rappelle les formules de trigonométrie suivantes : si l'on pose $t = \tan(x/2)$, alors

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

On obtient alors facilement le $\mathrm{d}x$, qui est donné par

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

et l'on en déduit que

$$\int \frac{\mathrm{P}(\cos x, \sin x)}{\mathrm{Q}(\cos x, \sin x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{P}((1-t^2)(1+t^2)^{-1}, (2t)(1+t^2)^{-1})}{\mathrm{Q}((1-t^2)(1+t^2)^{-1}, (2t)(1+t^2)^{-1})} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

5 Intégrales « impropres »

On peut étendre les définitions de subdivision, de jauge, de finesse, de somme de Riemann aux intervalles non compacts, et donc définir l'intégrale de Riemann généralisée, ainsi que l'intégrale de Lebesgue (les fonctions absolument intégrables) pour des intervalles non compacts : ouverts ou non borné.

Ce qu'il faut cependant retenir, c'est le théorème suivant :

Théorème 5.1 (Théorème de Hake). — *La fonction* $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ *est intégrable si, et seulement si, pour tout* $c \in [a, +\infty[$*,* f *est intégrable sur* $[a, c]$*, et si la limite*

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{L}$$

existe. On a alors

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{L}.$$

Corollaire 5.1. — *Avec les mêmes notations,* f *est Lebesgue-intégrable sur* $[a, b[$ *si, et seulement si, pour tout* $c \in [a, b[$*,* f *est Lebesgue-intégrable sur* $[a, c]$*, et si les limites*

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{et} \quad \lim_{c \to +\infty} \int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

existent.

Un théorème analogue est valable pour les fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert borné, du type $]a, b]$.

Une notion très important est celle de fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbf{R}$:

Proposition 5.1. — *La fonction* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *est intégrable si, et seulement si, la limite*

$$\lim_{a \to -\infty, b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{L}$$

existe. Dans ce cas,

$$\mathrm{L} = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Enfin f *est dite Lebesgue-intégrable sur* $\mathbf{R}$ *(on note* $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$*) si* f *et* $|f|$ *sont intégrables sur* $\mathbf{R}$*.*

Cette notion généralise celle de Lebesgue-intégrabilité sur un intervalle, par simple prolongement trivial : si f est définie sur $[a, b]$ par exemple, on peut la prolonger par zéro hors de $[a, b]$, et la Lebesgueintégrabilité de f sur $[a, b]$ est équivalente à celle de la fonction prolongée sur $\mathbf{R}$.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, +\infty[$. On suppose f intégrable sur tout sous-intervalle compact de $[a, +\infty[$. L'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est dite convergente si f est intégrable sur $[a, +\infty[$. Elle est dite absolument convergente si f est Lebesgue-intégrable sur $[a, +\infty[$. Sinon, on dit qu'elle est divergente. Le cas des autres types d'intervalle donne lieu à une terminologie analogue.

Proposition 5.2. — *Si f est continue sur $[a, +\infty[$, la convergence absolue de* I *implique sa convergence.*

Proposition 5.3 (Critères de convergence en $+\infty$). — *Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a*

1. *Si $|f(x)| \leq x^{-\alpha}$ pour un certain $\alpha > 1$ et pour tout x assez grand, alors* I *est absolument convergente.*
2. *Si $|f(x)| \leq \exp(-\eta x)$ pour un certain $\eta > 0$ et pour tout x assez grand, alors* I *est absolument convergente.*
3. *Si $|f(x)| \geq x^{-\alpha}$ pour un certain $\alpha \leq 1$ alors* I *est divergente.*

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a, b]$, intégrable sur $[c, b]$ pour tout $a < c \leq b$. L'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est dite convergente si f est intégrable sur $]a, b]$. Elle est dite absolument convergente si f est Lebesgue-intégrable sur $]a, b]$. Sinon, on dit qu'elle est divergente.

Proposition 5.4 (Critères de convergence en un point fini). — *Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a*

1. *Si $|f(x)| \leq 1/|x-a|^{\alpha}$ pour un certain $\alpha < 1$ et pour tout x assez proche de a, alors* I *est absolument convergente.*
2. *Si $|f(x)| \leq |\eta \operatorname{Log}|x-a||$ pour un certain $\eta > 0$ et pour tout x assez proche de a , alors* I *est absolument convergente.*
3. *Si $|f(x)| \geq 1/|x-a|^{\alpha}$ pour un certain $\alpha \geq 1$ alors* I *est divergente.*

Théorème 5.2 (Comparaison séries-intégrales). — *Soit f une fonction* positive *sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Pour que l'intégrale*

$$\mathrm{I} = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

soit (absolument) convergente, il faut et il suffit qu'il existe une suite croissante (x_n), tendant vers $+\infty$, et telle que la série de terme général

$$u_n = \int_{x_n}^{x_{x+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

soit (absolument) convergente.

6 Théorèmes de convergence, applications

Définition 6.1. — *Soient* I *un intervalle queconque de* $\mathbf{R}$ *et* $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ *; on dit que* f *est intégrable au sens de Lebesgue (ou Lebesgue-intégrable, ou « L^1 », ou absolument intégrable) si* f *et* $|f|$ *sont intégrables.*

On note $\mathcal{L}(\mathrm{I})$ l'espace des fonctions Lebesgue-intégrables sur I.

Proposition 6.1. — *Soient* f, g *deux fonctions intégrables, telles que pour tout* $x \in \mathrm{I}$*, on ait*

$$|f(x)| \leq g(x).$$

Alors f *est Lebesgue-intégrable, et*

$$\left| \int_{\mathrm{I}} f \right| \leq \int_{\mathrm{I}} |f| \leq \int_{\mathrm{I}} g.$$

Proposition 6.2. — *L'espace* $\mathcal{L}(\mathrm{I})$ *est un espace vectoriel. Par ailleurs, si* $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$*, alors* $\max\{f, g\}$ *et* $\min\{f, g\}$ *sont aussi Lebesgue-intégrables. Si de plus* g *est bornée, alors* $fg \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$*.*

Théorème 6.1 (Convergence monotone). — *Soit* (f_n) *une suite de fonctions définies sur* I*, et* f *une fonction définie sur* I*. On suppose que*

1. *les fonctions* f_n *sont Lebesgue-intégrables,*
2. *la suite* f_n *est croissante,*
3. *elle converge simplement vers* f*,*
4. *et la suite des intégrales* $\int_{\mathrm{I}} f_n$ *est majorée.*

Alors f *est Lebesgue intégrable et*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{I}} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{I}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 6.2 (Convergence dominée de Lebesgue). — *Soit* (f_n) *une suite de fonctions Lebesgue-intégrables sur* I*, convergent simplement vers une fonction* f*. On suppose qu'il existe une fonction Lebesgue-intégrable* g *telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in \mathrm{I}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Alors f *est Lebesgue-intégrable sur* I*, et*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n = \int_{\mathrm{I}} \lim_{n \to +\infty} f_n = \int_{\mathrm{I}} f.$$

Corollaire 6.1. — *En reprenant les mêmes notations, si* I *est compact, si chaque fonction* f_n *est Lebesgue-intégrable, si la suite* (f_n) *est uniformément bornée sur* $[a, b]$ *(c.-à.-d. il existe une constante* $\mathrm{M} > 0$ *telle que* $|f_n(x)| \leq \mathrm{M}, \forall x, n$*) et converge simplement vers* f*, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Corollaire 6.2. — *Si* (f_n) *est une suite de fonctions Lebesgue-intégrables sur* $[a, b]$ *qui converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$*, alors* f *est intégrable et*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 6.3 (Continuité sous le signe intégral). — *Soient* $\mathrm{I} = [a, b]$ *et* $\mathrm{T} = [c, d]$*, et* $f(x, t)$ *une fonction définie sur* $[a, b] \times [c, d]$*. On suppose que :*

1. *Pour tout* $t \in \mathrm{T}$*, la fonction* $x \mapsto f(x, t)$ *est Lebesgue-intégrable en la variable* x *sur* I*,*

2. *pour tout* $x \in \mathrm{I}$, *la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est continue en la variable* t *sur* T,
3. *il existe une fonction Lebesgue-intégrable* g *sur* I *telle que*

$$|f(x,t)| \leq g(x), \quad \forall (x,t) \in \mathrm{I} \times \mathrm{T}.$$

Alors la fonction

$$t \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

est continue sur $\mathrm{T} = [c,d]$.

Théorème 6.4 (Dérivabilité sous le signe intégral). — *Avec les même notations que plus haut, on suppose que :*

1. *Pour tout* $t_0 \in \mathrm{T}$ *tel-que* $x \mapsto f(x,t_0)$ *est Lebesgue-intégrable.*
2. *Pour tout* x, *la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est dérivable.*
3. *Il existe* g, *Lebesgue intégrable sur* I, *telle que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \leq g.$$

Alors pour tout t, *les fonctions*

$$x \mapsto f(x,t) \text{ et } x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

sont Lebesgue-intégrables sur $[a,b]$, *et la fonction*

$$t \mapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

est dérivable sur T, *de dérivée*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x.$$