

Feuille d'exercices numéro 3

1. Calculer les primitives suivantes:

$$\int e^x \cos x \, dx, \quad \int \frac{\text{Log } x}{x^n} \, dx \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \int x \arctan x \, dx, \quad \int (x^2 + x + 1)e^x \, dx .$$

2. À l'aide de changements de variables, calculer les primitives suivantes:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} \, dx \quad (\text{avec } t = \sqrt[6]{2+x}),$$
$$\int \frac{1}{((x-1)^2 - 4)^2} \, dx \quad (\text{avec } u = \frac{x-1}{2}),$$
$$\int (\arcsin x)^2 \, dx ,$$
$$\int x^2 \sqrt{1+x^3} \, dx .$$

3. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\text{Log } 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx.$$

4. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle compact $[a, b]$.

(a) Montrer que

$$\int_a^b f(t) \, dt = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(a-x)(b-x) \, dx.$$

(b) En déduire un encadrement de l'intégrale de f entre a et b en fonction des bornes inférieures et supérieures de f'' sur $[a, b]$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$ posons

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt.$$

(a) Établir une relation de récurrence vérifiée par la suite (I_n) .

(b) En déduire la valeur de I_n pour tout n .

(c) En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k .$$

6. Calculer les primitives des fonctions suivantes:

$$\frac{1}{x^2+5}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-5}}, \quad e^x \sin(e^x), \quad \tan^3 x, \quad \frac{1}{\tan^3 x},$$
$$\frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m} \quad (m \in \mathbb{N}), \quad \frac{\text{Log } x}{x}, \quad \frac{\text{ch } x}{\text{sh}^5 x} .$$

7. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , strictement croissante. On définit les deux intégrales I_1 et I_2 par

$$I_1 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt.$$

(a) Justifier l'existence de l'application réciproque f^{-1} . Quelles propriétés possède-t-elle?

(b) Calculer I_2 en fonction de I_1 .

(c) Faire un dessin faisant apparaître les graphes de f et f^{-1} , et interpréter le résultat ci-dessus graphiquement.

8. Déterminer les primitives des fonctions suivantes:

$$\frac{x^4 + 1}{x(x-1)^3}, \quad \frac{1}{(x^4 + 1)^2}, \quad \frac{x}{x^4 + x^2 + 1}, \quad \frac{1}{(x-1)(x^2 - 2x - 2)^2},$$

$$\frac{1}{(x+2)(x^2 + 2x + 5)}, \quad \frac{2x}{(1-x+x^2)^2}, \quad \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2 + 4)}.$$