Université d'Aix-Marseille I **Licence de Mathématiques, deuxième année**

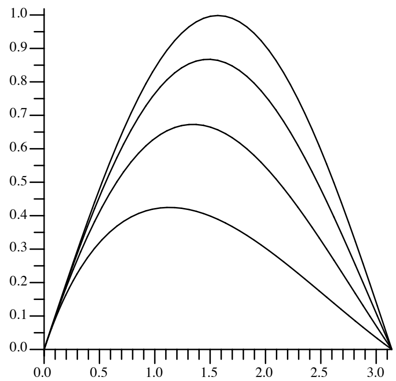
Faculté des sciences, Saint Charles **TD intégration 1**

Corrigé de la feuille 5

0. On appelle "limite inférieure d'une suite u_n", la limite (quand $n \to +\infty$) de la borne inférieure de l'ensemble des u_k pour $k \geq n$.
On appelle "limite supérieure d'une suite u_n", la limite (quand $n \to +\infty$) de la borne supérieure de l'ensemble des u_k pour $k \geq n$.
Le lemme de Fatou (dans le cas de fonctions positives) dit que si les fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}^+$ sont intégrables et si $\liminf_{n\to+\infty} \left(\int_I f_n \right)$ est finie, alors $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ est intégrable et
$$\int_I \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n \right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \left(\int_I f_n \right).$$
Démonstration: Soit $x \in I$ fixé. D'après la définition des limites inférieures, $\liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ est la limite de la suite croissante
$$h_n(x) = \inf\{f_k(x),\ k \geq n\}. \tag{$*$}$$
Chaque fonction h_n est intégrable d'après le théorème de convergence monotone, parce que $h_n(x) = \lim_{m\to+\infty} \inf\{f_k(x),\ n \geq k \leq m\}$ est la limite d'une suite décroissante de fonctions intégrables positives. On déduit de $(*)$ que $\int_I h_n \leq \int_I f_k$ pour tout $k \geq n$, d'où
$$\int_I h_n \leq \inf\left\{ \int_I f_k,\ k \geq n \right\}. \tag{$**$}$$
Le second membre de $(**)$ est une suite croissante de réels, qui tend vers $\liminf_{n\to+\infty} \left(\int_I f_n \right)$.
On a donc
$$\int_I h_n \leq \liminf_{n\to+\infty} \left(\int_I f_n \right). \tag{$***$}$$
Le second membre de $(***)$ est une constante finie d'après l'hypothèse, ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence monotone à la suite croissante de fonctions h_n, d'où l'intégrabilité de $\lim_{n\to+\infty} h_n(x)$ et
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_I h_n \right) = \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} h_n \right). \tag{$****$}$$
Compte tenu que $\lim_{n\to+\infty} h_n = \liminf_{n\to+\infty} f_n$, on déduit de $(***)$ et $(****)$
$$\int_I \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n \right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \left(\int_I f_n \right).$$
Le lemme de Fatou n'est pas destiné à être utilisé dans les exercices mais est le passage obligé pour la démonstration du théorème de convergence dominée.

1. a) On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{n \sin x}{x+n}$ avec $x \in [0, \pi]$.

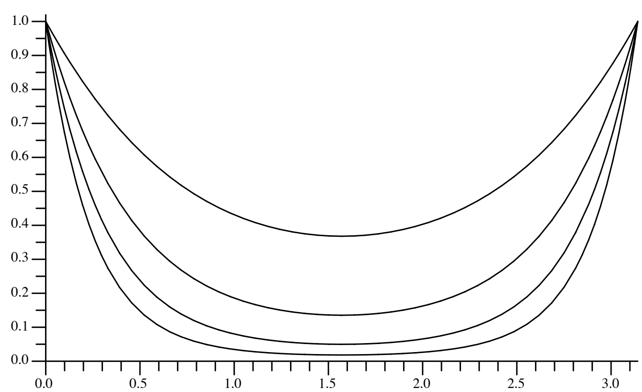
Représentons ces fonctions pour $n = 1, 3, 10$ et 100 (la plus petite est f_1 et la plus grande f_{100}):



Puis vérifions les trois conditions du théorème:
• chaque fonction f_n est Lebesgue-intégrable sur l'intervalle $[0, \pi]$ car continue (quotient de fonctions continues non nulles si $n \geq 1$);
• $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sin x$ (parce que $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{\frac{x}{n}+1}$ et $\dfrac{x}{n}$ tend vers 0);
• $|f_n|$ est majorée par une fonction intégrable qui ne dépend pas de n: par exemple
$f_n(x) = \dfrac{\sin x}{\frac{x}{n}+1} \leq \sin x$ pour tout $x \in [0, \pi]$.
Donc le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi} f_n\right) = \int_0^{\pi}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right) = \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 2.$$

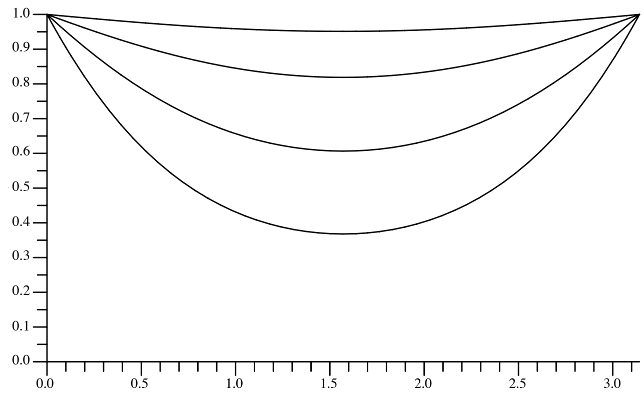
b) On applique le théorème de convergence dominée à $f_a(x) = e^{-a\sin x}$ avec $x \in [0, \pi]$. Ici on a $a \in \mathbb{R}$, $a \to +\infty$, on peut se limiter à $a \in \mathbb{R}^+$.
Représentons ces fonctions pour $a = 1, 2, 3, 4$ (la plus grande est f_1 et la plus petite f_4):



Puis vérifions les trois conditions du théorème:
• chaque fonction f_a est Lebesgue-intégrable sur l'intervalle $[0, \pi]$;
• $\lim_{a\to+\infty} f_a(x) = 0$ presque partout (plus précisément, sauf aux points $x = 0$ et $x = \pi$ où le sinus s'annule);
• $|f_a|$ est majorée par une fonction intégrable (sur $[0, \pi]$) qui ne dépend pas de a: par exemple la fonction constante $g(x) = 1$.
La limite de $\displaystyle\int_0^{\pi} f_a$ est donc $\displaystyle\int_0^{\pi} 0 \, \mathrm{d}x = 0$.
Remarquons que l'énoncé ne dit pas que a est entier, mais la limite est la même pour a réel parce que tout réel est compris entre deux entiers: $n \leq a < n+1$, et par conséquent $f_n \geq f_a > f_{n+1}$.

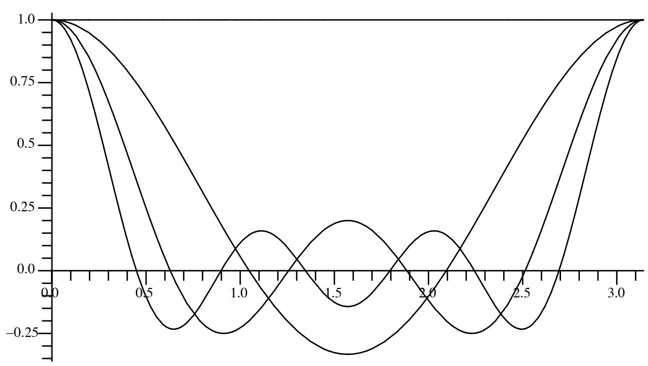
c) On applique le théorème de convergence dominée à $f_a(x) = e^{-a\sin x}$ avec $x \in [0, \pi]$. Ici on a $a \in \mathbb{R}$, $a \to 0$, on peut se limiter à $a \in [-1, 1]$.

Représentons ces fonctions pour $a = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{20}$ (la plus petite est f_1 et la plus grande $f_{\frac{1}{20}}$):

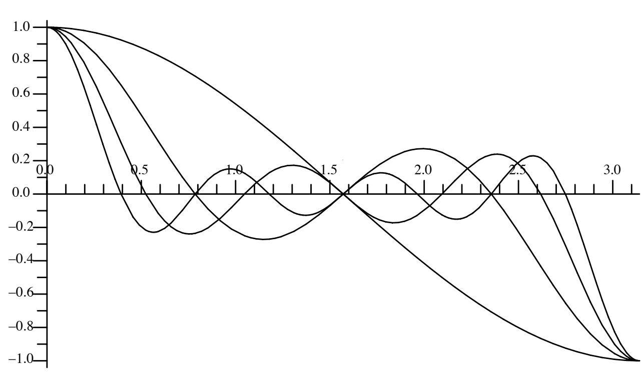


Puis vérifions les trois conditions du théorème:
• chaque fonction f_a est Lebesgue-intégrable sur l'intervalle $[0, \pi]$;
• $\lim\limits_{a \to 0} f_a(x) = 1$ pour tout $x \in [0, \pi]$;
• $|f_a|$ est majorée par une fonction intégrable (sur $[0, \pi]$) qui ne dépend pas de a: par exemple la fonction constante $g(x) = e^1$ majore les $|f_a|$ pour $a \in [-1, 1]$.
La limite de $\displaystyle\int_0^\pi f_a$ quand $a \to 0$ $\left(\text{avec } a = \dfrac{1}{n}\right)$ est donc $\displaystyle\int_0^\pi 1 \, \mathrm{d}x = \pi$.
Remarquons que l'énoncé ne dit pas que a est un inverse d'entier, mais la limite est la même pour a réel parce que tout réel est compris entre deux entiers: $n \leq \dfrac{1}{a} < n+1$, et par conséquent $f_{\frac{1}{n}} \leq f_a < f_{\frac{1}{n+1}}$.

d) On applique le théorème de convergence dominée à $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n \sin x}$ avec $x \in [0, \pi]$.
Représentons ces fonctions pour $n = 1, 3, 5, 7$ (la plus grande est f_1 qui vaut 1, et celle dont la courbe est la plus proche de l'axe des x est f_7):



Puis pour $n = 2, 4, 6, 8$ (f_2 est la fonction cosinus, et f_8 est celle dont la courbe est la plus proche de l'axe des x):



Puis vérifions les trois conditions du théorème:

- chaque fonction f_n est Lebesgue-intégrable sur l'intervalle $[0,\pi]$ (après l'avoir prolongée par continuité en posant $f_n(0) = \lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$ et $f_n(\pi) = \lim_{x\to\pi} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est pair;} \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ presque partout parce que $-1 \le \sin(nx) \le 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\sin x} = 0$ si $x \in]0,\pi[$;
- $|f_n|$ est majorée par une fonction intégrable (sur $[0,\pi]$) qui ne dépend pas de n: on vérifie facilement par récurrence sur l'entier n, l'inégalité $|f_n(x)| \le 1$ c'est à dire $|\sin(nx)| \le n|\sin x|$, en utilisant la formule $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$.

La limite de $\displaystyle\int_0^\pi f_n$ quand $n \to +\infty$ est donc $\displaystyle\int_0^\pi 0 \; \mathrm{d}x = 0$.

2. a) $\displaystyle\int_0^1 nx^n f(x)\;\mathrm{d}x = \left[n\frac{x^{n+1}}{n+1}f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 n\frac{x^{n+1}}{n+1}f'(x)\;\mathrm{d}x.$

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de convergence dominée à la seconde intégrale, compte tenu que $\left|n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}f'(x)\right| \le |f'(x)| =$ fonction intégrable sur $[0,1]$, indépendante de n.

Compte tenu que, pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = 0$, on conclut que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx^n f(x)\;\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 0\;\mathrm{d}x = f(1)$.

b) Cette fois f est supposée continue en $x = 1$; on utilise donc les réels $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\text{si } |x-1| \le \alpha, \text{ alors } |f(x) - f(1)| \le \varepsilon,$$

(où ε peut être choisi comme on veut, et α dépend de ε). D'après la relation de Chasles on a

$$\int_0^1 nx^n f(x)\;\mathrm{d}x = \int_0^{1-\alpha} nx^n f(x)\;\mathrm{d}x + \int_{1-\alpha}^1 nx^n f(x)\;\mathrm{d}x.$$

On peut utiliser l'inégalité $|f(x) - f(1)| \le \varepsilon$ seulement dans la deuxième intégrale.

La première intégrale tend vers 0 parce que sa valeur absolue est plus petite que $n(1-\alpha)^n \displaystyle\int_0^{1-\alpha} |f(x)|\;\mathrm{d}x$, compte tenu qu'on a supposé $|f|$ intégrable, et

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-\alpha)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{\mathrm{Log}\, n} e^{n\mathrm{Log}(1-\alpha)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{\mathrm{Log}\, n}{n} + \mathrm{Log}(1-\alpha)\right)} = 0 \quad (\mathrm{Log}(1-\alpha) < 0).$$

La seconde intégrale est comprise entre $\displaystyle\int_{1-\alpha}^1 nx^n(f(1)-\varepsilon)\;\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{1-\alpha}^1 nx^n(f(1)+\varepsilon)\;\mathrm{d}x$ qu'on peut calculer puisque $f(1) \pm \varepsilon$ est constante; ces deux dernières intégrales (après calcul) tendent respectivement vers $f(1) - \varepsilon$ et $f(1) + \varepsilon$ quand $n \to +\infty$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on conclut que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx^n f(x)\;\mathrm{d}x = f(1)$.

3. Cet exercice utilise la limite classique $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(rappelons que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *est égal à* $e^{n\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$*, qui tend vers* e *parce que Log* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ *est équivalent à* $\dfrac{1}{n}$*, c'est à dire* n*Log* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{Log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1$*).*

On remarque d'abord que $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\;\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(x)}{x}\;\mathrm{d}x$: c'est dû au fait que la fonction $G(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{f(x)}{x}\;\mathrm{d}x$, comme toute primitive de fonction intégrable, est continue.

Ensuite, par le changement de variable $x = t^n$ on obtient

$$\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(x)}{x}\;\mathrm{d}x = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{f(t^n)}{t^n} nt^{n-1}\;\mathrm{d}t = n\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{f(t^n)}{t}\;\mathrm{d}t, \qquad (*)$$

ce qui n'est pas exactement ce qu'on veut: on veut obtenir $n\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n)\;\mathrm{d}t$. Il suffit de comparer ces deux dernières intégrales, compte tenu que t est compris entre 1 et $1 + \dfrac{1}{n}$ (qui tend vers 1).

On a (dans le cas où f est positive)

$$\begin{aligned} n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n)\ \mathrm{d}t &= n\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{f(t^n)}{t} t\ \mathrm{d}t \\ &\le n\left(1+\frac{1}{n}\right)\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{f(t^n)}{t}\ \mathrm{d}t \\ &\le \left(1+\frac{1}{n}\right)\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(x)}{x}\ \mathrm{d}x \quad \text{(d'après }(*)\text{)} \\ &\to \int_1^e \frac{f(x)}{x}\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

et, comme $1 \ge \frac{1}{t}$,

$$\begin{aligned} n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n)\ \mathrm{d}t &\ge n\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{f(t^n)}{t}\ \mathrm{d}t \\ &\ge \left(1+\frac{1}{n}\right)\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(x)}{x}\ \mathrm{d}x \quad \text{(d'après }(*)\text{)} \\ &\to \int_1^e \frac{f(x)}{x}\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

donc finalement $\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n)\ \mathrm{d}t = \int_1^e \frac{f(x)}{x}\ \mathrm{d}x$. Si f n'est pas positive, on sait que $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = \max\{f, 0\}$ et $f^- = \max\{-f, 0\}$ (fonctions continues positives); il suffit donc d'utiliser le résultat, qui est valable pour les fonctions f^+ et f^-.

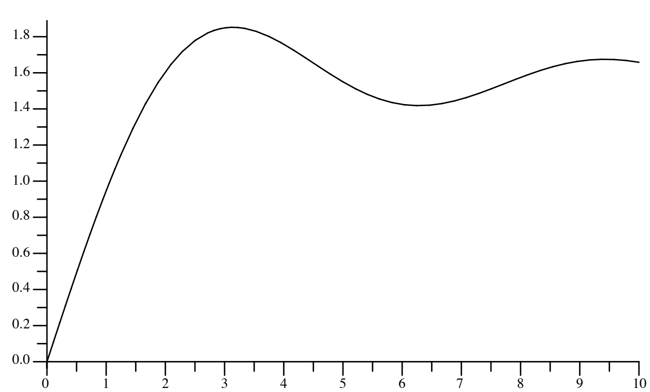
4. On veut dériver $\varphi(t) = \int_0^1 f(x)\sin(xt)\ \mathrm{d}x$; vérifions les trois conditions du théorème de dérivation sous le signe "intégrale" (théorème 10.8):
• la fonction $\psi(x,t) = f(x)\sin(xt)$ est Lebesgue-intégrable pour $x \in [0,1]$ car $|f(x)\sin(xt)| \le |f(x)xt| = |t|\cdot|f(x)x|$, où $|t|$ est constante et on a supposé $|xf(x)|$ intégrable;
• elle est dérivable par rapport à t;
• sa dérivée par rapport à t vaut $xf(x)\cos(xt)$, laquelle est majorée en valeur absolue par $|xf(x)|$, qui est intégrable et ne dépend pas de t.
Le théorème s'applique et

$$\varphi'(t) = \int_0^1 xf(x)\cos(xt)\ \mathrm{d}x. \qquad (**)$$

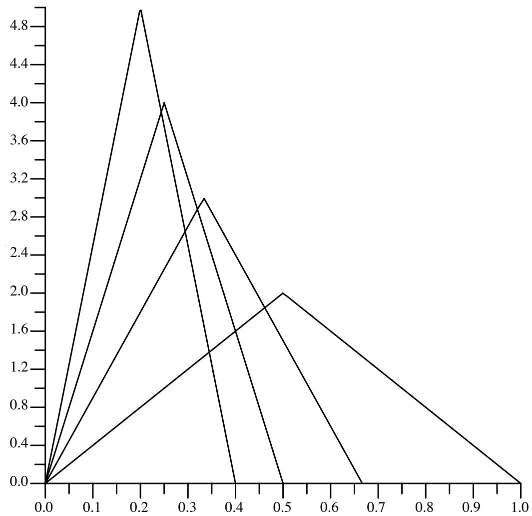
Application: la fonction $t \mapsto \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{x}\ \mathrm{d}x$ est égale à la fonction φ qu'on vient d'étudier, quand f est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Cette dernière vérifie la condition de l'énoncé c'est à dire, $|xf(x)|$ est intégrable puisque $|xf(x)| = 1$. Donc, d'après $(**)$,

$$\varphi'(t) = \int_0^1 x\frac{1}{x}\cos(xt)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \cos(xt)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(xt)}{t}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\sin t}{t}.$$

Remarquons que la fonction φ, c'est à dire la primitive de $\frac{\sin t}{t}$, n'est pas calculable c'est à dire ce n'est pas une composée de fonctions usuelles.
Courbe de φ:



5. Représentons les f_n pour $n = 2, 3, 4, 5$ (la plus petite est f_2 et la plus grande f_5):



La limite de f_n est nulle c'est à dire, pour tout $x \in [0, 1]$ fixé, $f_n(x)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Vérifions-le:
si n est strictement plus grand que la partie entière de $\frac{2}{x}$, alors $n > \frac{2}{x}$, donc $\frac{2}{n} < x \leq 1$, et d'après l'énoncé $f_n(x)$ vaut 0, ce qui prouve bien (d'après la définition de la limite d'une suite) que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Mais le calcul de $\int_0^1 f_n$ donne $\int_0^1 f_n = 1$. On en déduit:
a) qu'il n'existe pas de couple de fonctions intégrables (g, h) tel que $g \leq |f_n| \leq h$ pour tout n: s'il existait on pourrait appliquer le théorème de convergence dominée ($|f_n| \leq \max\{|g|, |h|\}$), et $\int_0^1 f_n$ tendrait alors vers $\int_0^1 0 \, \mathrm{d}x = 0$ au lieu de tendre vers 1;
b) la fonction $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ n'est pas intégrable pour la même raison: c'est une fonction qui ne dépend pas de n et qui majore les $|f_n| = f_n$.

6. La fonction à intégrer $\varphi(t) = \frac{1}{1 + t^\alpha}$ est continue en tout $t \in [0; +\infty[$ (et même en $t = 0$, en posant $\varphi(0) = 1$), et $\frac{1}{1 + t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ (fonction intégrable de $t \in [1; +\infty[$ si $\alpha > 1$), donc $\frac{1}{1 + t^\alpha}$ est intégrable (par rapport à $t \in [0; +\infty[$).
Pour la continuité de la fonction $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha}$ il faut vérifier les trois conditions du théorème (de continuité des fonctions définies par intégrales):
- $\frac{1}{1 + t^\alpha}$ est Lebesgue-intégrable par rapport à t;
- elle est continue par rapport à α;
- pour $\alpha \in [\beta; \gamma]$, sous-intervalle de $]1; +\infty[$, on peut majorer $\frac{1}{1 + t^\alpha}$ par une fonction intégrable qui ne dépend pas de α: la fonction $\frac{1}{1 + t^\beta}$.

Le théorème dit alors que F est continue (sur tout sous-intervalle $[\beta; \gamma] \subset]1; +\infty[$, donc sur $]1; +\infty[$).
Calculons maintenant cette intégrale dans le cas où α est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$. On peut supposer que p est pair (s'il est impair, on remplace p par $2p$ et q par $2q$). Par le changement de variable $t = u^q$,

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{q u^{q-1}}{1 + u^p} \, du.$$

Le polynôme $1 + u^p$ a p racines complexes conjuguées deux à deux qu'on appelle $u_0, u_1, \ldots, u_{\frac{p}{2}-1}$ et $\overline{u_0}, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_{\frac{p}{2}-1}}$ (c'est pour ça qu'on a supposé p pair).

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{P(u)}{Q(u)} = \dfrac{qu^{q-1}}{1+u^p}$ est

$$\begin{aligned}
\frac{P(u)}{Q(u)} &= \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \frac{P(u_k)/Q'(u_k)}{u-u_k} + \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \frac{P(\overline{u_k})/Q'(\overline{u_k})}{u-\overline{u_k}} \\
&= 2\frac{q}{p} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \Re\left(\frac{{u_k}^{q-p}}{u-u_k}\right) \\
&= -\frac{q}{p} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \Re\left({u_k}^q \frac{2u-u_k-\overline{u_k}}{(u-u_k)(u-\overline{u_k})} + {u_k}^q \frac{u_k-\overline{u_k}}{(u-u_k)(u-\overline{u_k})}\right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé la relation $z+\overline{z} = 2\Re(z)$ (= deux fois la partie réelle de z) pour tout nombre complexe z, et on a remplacé ${u_k}^p =$ par -1 puisque $1+{u_k}^p = 0$. La première fraction appartient à $\mathbb{R}$ et son numérateur est la dérivée de son dénominateur (le dénominateur est $|u-u_k|^2$); sa primitive est donc un logarithme. La primitive de la deuxième fraction étant un arctangente (voir le formulaire du cours),

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(u)}{Q(u)}\, du = -2\frac{q}{p} \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \left[\Re\left({u_k}^q\right) \operatorname{Log}|u-u_k| - \Im\left({u_k}^q\right) \arctan\frac{u-\Re(u_k)}{\Im(u_k)}\right]_{u=0}^{u\to+\infty}. \qquad (*)$$

Remarquons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \Re\left({u_k}^q\right) \operatorname{Log}|u-u_k|$ est nul en $u=0$ puisque $\operatorname{Log}|-u_k|^2 = \operatorname{Log}1 = 0$; il est nul aussi en $u\to+\infty$ parce que la somme des ${u_k}^q$ est nulle (par la formule des sommes géométriques, avec $u_k = e^{i(2k+1)\pi/p}$) et parce que $\operatorname{Log}|u-u_k| = \operatorname{Log}|u| + \operatorname{Log}\left|1-\dfrac{u_k}{u}\right|$, où le premier terme ne dépend pas de k et le deuxième tend vers 0 quand $u\to+\infty$. Donc dans l'expression $(*)$ le terme en logarithme est nul.

Le terme en arctangente est la partie imaginaire de $\displaystyle 2\frac{q}{p}\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} {u_k}^q\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{p}-\frac{2\pi}{p}k\right)$, qui est une combinaison linéaire de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} {u_k}^q$ (dont on a vu qu'il est nul) et de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} k{u_k}^q$. On calcule cette dernière somme $\left(\text{par la formule } \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} ka^k = \frac{(n-1)a^{n+1}-na^n+a}{(a-1)^2}\right)$.

D'où $\displaystyle 2\frac{q}{p}\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} {u_k}^q\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{p}-\frac{2\pi}{p}k\right) = \frac{i\pi q/p}{\sin(\pi q/p)}$ c'est à dire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}.$$

Cette relation se prolonge par continuité à tout réel $\alpha>1$, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$ et $\dfrac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$ sont des fonctions continues de α.

7. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge parce que $0 \le e^{-t}t^{x-1} \le t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$.
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge parce qu'on a (pour t assez grand)

$$0 \le t^{x-1} \le e^{\frac{t}{2}}$$
$$0 \le e^{-t}t^{x-1} \le e^{-t}e^{\frac{t}{2}} = e^{-\frac{t}{2}}.$$

$\Gamma(x+1)$ se calcule en intégrant par parties, avec $F'(t) = e^{-t}$ et $G(t) = t^x$.
$\Gamma(n) = (n-1)!$ (pour n entier) se déduit de $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, par récurrence.
Le théorème de dérivation des fonctions définies par intégrales permet de dire que la fonction Γ est dérivable en tout $x_0 \in]0,+\infty[$ puisque, en localisant x dans l'intervalle $\left[\dfrac{x_0}{2}, 2x_0\right]$ (par exemple),

- $e^{-t}t^{x-1}$ est Lebesgue-intégrable par rapport à t;
- $e^{-t}t^{x-1}$ est dérivable par rapport à x;

- $\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t}t^{x-1}\right)\right| = e^{-t}t^{x-1}\,|\mathrm{Log} t| \leq e^{-t}\max\left(t^{x_0/2-1}, t^{2x_0-1}\right)|\mathrm{Log} t|$ (fonction Lebesgue-intégrable indépendante de x).

8. Pour x fixé, la fonction $\dfrac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}$ tend vers x quand $t \to 0$; on peut donc la prolonger en une fonction continue (qui vaut x en $t=0$). Son intégrale pour $t \in [0;+\infty[$ converge d'après le critère de comparaison parce que $\left|\dfrac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\right| \leq \dfrac{\pi/2}{t^3}$.
   On la dérive en appliquant le théorème de dérivation des fonctions définies par intégrales. Sa dérivée $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\,\mathrm{d}t$ vaut $\left[\dfrac{x\arctan(tx)-\arctan(t)}{x^2-1}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \dfrac{\pi/2}{|x|+1}$ donc

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\mathrm{Log}(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2}\mathrm{Log}(-x+1) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$