Université d'Aix-Marseille I

Faculté des sciences, Saint Charles

Licence de mathématiques, deuxième année

TD intégration 1 (2008)

Feuille d'exercices numéro 4

1. Calculer, lorsqu'elles sont convergentes, les intégrales suivantes

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}, \quad \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{2-x}, \quad \int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}, \quad \int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

2. Calculer, lorsqu'elles sont convergentes, les intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}, \quad \int_{-\infty}^2 e^{2x}\ \mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\ \mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}, \quad \int_a^{+\infty} e^{-x}\sin x\ \mathrm{d}x.$$

3. Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{Log}(\sin u)\ \mathrm{d}u$$

est convergente. Établir les relations

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{Log}|\cos u|\ \mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \mathrm{Log}|\sin 2u|\ \mathrm{d}u,$$

et en déduire que $I = -\pi \mathrm{Log} 2$.

4. Discuter, suivant les valeurs des nombres réels α, β, la convergence ou la divergence des intégrales suivantes

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}^{\alpha} t}{t^{\beta}}\ \mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}(1+t^{\alpha})}{t^{\beta}}\ \mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}(1+x^{\beta})}\ \mathrm{d}x.$$

5. Soit f une fonction numérique définie sur $[a,+\infty[$. On suppose f positive, décroissante, continue et tendant vers 0 en $+\infty$. Soit par ailleurs g une fonction numérique localement Lebesgue-intégrable sur $[a,+\infty[$, telle que l'intégrale indéfinie

$$\psi_{|g|}(x) = \int_a^x |g(t)|\ \mathrm{d}t$$

soit bornée indépendamment de x. Montrer qu'alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$$

est convergente (on pourra penser à appliquer la formule de la moyenne pour les intégrales).

6. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ on a

$$\int_0^x \mathrm{Log}\frac{1}{1-t}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

et que la relation est encore vraie pour $x = 1$.