Université d'Aix-Marseille I | **Licence de mathématiques, deuxième année**

Faculté des sciences, Saint Charles | **TD intégration 1**

Corrigé de la feuille 4

Soit f une fonction, et F une primitive de f. D'après le théorème de Hake,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x)$$

(si ces deux limites existent et sont finies). On dit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ est convergente. C'est aussi valable si a ou b est infini. Si on ne saît pas calculer F, il faut comparer la valeur absolue de f a une autre fonction plus simple dont on connaît la primitive $\Big($pour savoir si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ est convergente$\Big)$.

1. a) La fonction qu'on veut intégrer entre 0 et 3, c'est à dire la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$, n'est pas définie en $x = 3$; on écrit donc

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{c\to 3}\int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}\\ &= \lim_{c\to 3}\left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^c\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

b) Faisons de même avec la fonction $\dfrac{1}{2-x}$ (pas définie en $x = 2$); cette fois-ci sa primitive $-\ln(2-x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 2, on dit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{2-x}$ diverge.

c) La fonction $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ n'est pas définie en $x = 1$. Son intégrale de $x = 0$ à $x = 4$ est divergente parce qu'au moins une des deux intégrales $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\right.$ ou $\left.\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\right)$ l'est:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \lim_{c\to 1}\int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \lim_{c\to 1}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^c = +\infty.$$

d)
$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} &= \lim_{\substack{c\to 1\\ c<1}}\int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\substack{d\to 1\\ d>1}}\int_d^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}\\ &= \lim_{\substack{c\to 1\\ c<1}}\left[\frac{(x-1)^{2/3}}{2/3}\right]_0^c + \lim_{\substack{d\to 1\\ d>1}}\left[\frac{(x-1)^{2/3}}{2/3}\right]_d^4\\ &= \frac{3^{2/3}-1}{2/3}.\end{aligned}$$

2. a) $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} &= \lim_{c\to+\infty}\int_0^c\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}\\ &= \lim_{c\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_0^c\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{2}e^{2x}\ \mathrm{d}x &= \lim_{c\to-\infty}\int_c^2 e^{2x}\ \mathrm{d}x\\ &= \lim_{c\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_c^2\\ &= \frac{e^4}{2}.\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\sqrt{x}\ \mathrm{d}x &= \lim_{c\to+\infty}\int_1^c\sqrt{x}\ \mathrm{d}x\\ &= \lim_{c\to+\infty}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^c\\ &= +\infty,\ \text{l'intégrale diverge.}\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2\mathrm{ch}x} &= \lim_{c\to-\infty}\int_c^0\frac{\mathrm{d}x}{2\mathrm{ch}x}+\lim_{d\to+\infty}\int_0^d\frac{\mathrm{d}x}{2\mathrm{ch}x}\\ &= \lim_{c\to-\infty}[\arctan(e^x)]_c^0+\lim_{d\to+\infty}[\arctan(e^x)]_0^d\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}e^{-x}\sin x\ \mathrm{d}x &= \lim_{c\to+\infty}\int_a^c e^{-x}\sin x\ \mathrm{d}x\\ &= \lim_{c\to+\infty}\left[-\frac{e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x}{2}\right]_a^c\\ &= \frac{e^{-a}\cos a+e^{-a}\sin a}{2}.\end{aligned}$$

3. L'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{Log}(\sin u)\ du$ est calculable (c'est le but de cet exercice), bien que la primitive de $\mathrm{Log}(\sin u)$ ne le soit pas.

a) On écrit $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Log}(\sin u)\ du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{Log}(\sin u)\ du$, puisque la fonction $\mathrm{Log}(\sin u)$ n'est pas défini en $u=0$ ni en $u=\pi$. Elle est équivalente à $\mathrm{Log}u$ quand u tend vers 0:

$$\begin{aligned}\lim_{u\to0}\frac{\mathrm{Log}(\sin u)}{\mathrm{Log}u} &= \lim_{u\to0}\frac{\mathrm{Log}\left(\frac{\sin u}{u}u\right)}{\mathrm{Log}u}\\ &= \lim_{u\to0}\frac{\mathrm{Log}\left(\frac{\sin u}{u}\right)+\mathrm{Log}u}{\mathrm{Log}u}\\ &= \lim_{u\to0}\frac{1}{\mathrm{Log}u}\mathrm{Log}\left(\frac{\sin u}{u}\right)+1\\ &= 1.\end{aligned}$$

Sachant que $\mathrm{Log}u$ est intégrable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, le théorème de comparaison permet de dire que $\mathrm{Log}(\sin u)$ l'est aussi. Quant à $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{Log}(\sin u)\ du$, elle est égale à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Log}(\sin u)\ du$ (par le changement de variable $u=\pi-t$).

b) On vérifie d'abord la relation $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{Log}(\sin u)\ du = \int_0^{\pi/2} \text{Log}|\cos t|\ dt$ (par le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$). L'intégrale de $\pi/2$ à π (de chacune des deux fonctions $\text{Log}(\sin u)$ et $\text{Log}|\cos u|$) est égale à son intégrale de 0 à $\pi/2$ (par le changement de variable $u = \pi - t$); on a donc bien

$$I = \int_0^{\pi} \text{Log}|\cos u|\ du.$$

c) En faisant $u = 2t$ on obtient $I = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{Log}|\sin(2t)|\,\mathrm{d}t$. On a aussi $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \text{Log}|\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \text{Log}|\sin(2t)|\ \mathrm{d}t$ (par le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} + t$), et on déduit de ces deux égalités

$$I = \int_0^{\pi} \text{Log}|\sin(2u)|\ du.$$

d) Compte tenu que $|\sin(2u)| = 2\sin u|\cos u|$ (pour $u \in [0,\pi]$) et compte tenu des questions précédentes,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \text{Log}\,(2\sin u|\cos u|)\ du \\ &= \int_0^{\pi} (\text{Log}2 + \text{Log}(\sin u) + \text{Log}|\cos u|)\ du \\ &= \pi\text{Log}2 + I + I \end{aligned}$$

d'où $\boxed{I = -\pi\text{Log}2}$.

4. a) L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\text{Log}^\alpha t}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ diverge si $\beta \leq 1$ parce qu'on a $\dfrac{\text{Log}^\alpha t}{t^\beta} \geq \dfrac{\text{Log}^\alpha 2}{t^\beta}$ avec $\text{Log}^\alpha 2$ constante strictement positive, et parce qu'on sait que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\beta}$ diverge.

Vérifions que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\text{Log}^\alpha t}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si $\beta > 1$: pour tout $\varepsilon > 0$ on sait que $\text{Log}t \leq t^\varepsilon$ pour t assez grand (t^ε l'emporte sur $\text{Log}t$). Comme $\beta > 1$ on peut choisir ε de sorte que $\beta - \alpha\varepsilon > 1$; on a alors $\dfrac{\text{Log}^\alpha t}{t^\beta} \leq \dfrac{1}{t^{\beta-\alpha\varepsilon}}$ avec $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\beta-\alpha\varepsilon}}$ convergente, donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\text{Log}^\alpha t}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ aussi est convergente. Finalement la présence du logarithme au numérateur n'a pas changé le résultat: on a convergence si et seulement si $\boxed{\beta > 1}$.

b) Il n'en est pas de même pour l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Log}(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$, puisque dans ce cas il faut vérifier que $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\text{Log}(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\text{Log}(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ convergent. Supposons d'abord $\alpha > 0$.
Pour I_1 on utilise l'équivalent $\text{Log}(1+t^\alpha) \sim t^\alpha$, c'est à dire les inégalités $t^\alpha(1-\varepsilon) \leq \text{Log}(1+t^\alpha) \leq t^\alpha(1+\varepsilon)$ pour t voisin de 0. On se ramène donc à l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\beta-\alpha}}$, qui converge si et seulement si $\beta - \alpha < 1$ c'est à dire $\beta < \alpha + 1$.
Pour I_2 on procède comme à la question a), en utilisant les inégalités $1 \leq \text{Log}\,(1+t^\alpha) \leq (1+t^\alpha)^\varepsilon \leq (2t^\alpha)^\varepsilon$ pour t assez grand.

Donc I converge si et seulement si $\boxed{1 < \beta < \alpha + 1}$.
Dans le cas $\alpha < 0$ on fait l'inverse: entre 0 et 1 on a $1 \leq \text{Log}\,(1 + t^\alpha) \leq (1 + t^\alpha)^\varepsilon \leq (2t^\alpha)^\varepsilon$ quand t est assez petit, donc I_1 converge si et seulement si $\beta < 1$. Et entre 1 et $+\infty$ on a l'équivalent $\text{Log}\,(1 + t^\alpha) \sim t^\alpha$ puisque t^α tend vers 0 quand $t \to +\infty$; la condition est donc $\beta - \alpha > 1$. On obtient donc $\boxed{1 > \beta > \alpha + 1}$ comme condition si $\alpha < 0$.
I diverge évidemment si $\alpha = 0$: I_1 et I_2 ne peuvent pas converger toutes les deux.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1 + x^\beta)}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{\sin x}{x^\alpha(1 + x^\beta)}\,\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1 + x^\beta)}\,\mathrm{d}x.$
Pour la première intégrale on utilise la même méthode qu'à la question b): quand x tend vers 0, $\sin x$ est équivalent à x et $x^\alpha(1 + x^\beta) = x^\alpha + x^{\alpha+\beta}$ est équivalent au terme de plus bas degré donc

$$\frac{\sin x}{x^\alpha(1 + x^\beta)} \sim \begin{cases} \dfrac{x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} & \text{si } \beta \geq 0 \\ \dfrac{x}{x^{\alpha+\beta}} = \dfrac{1}{x^{\alpha+\beta-1}} & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

On conclut que $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin x}{x^\alpha(1 + x^\beta)}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\begin{cases} \alpha < 2 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha + \beta < 2 \\ \beta < 0 \end{cases}$.
Pour démontrer la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1 + x^\beta)}\,\mathrm{d}x$, on se débarasse de $\sin x$ (qui n'est pas de signe constant) en intégrant par parties avec $F' = \sin x$ et $G = \dfrac{1}{x^\alpha(1 + x^\beta)}$.
Comme $F = -\cos x + \text{constante}$, on choisit la constante égale à 1 de façon que $F = -\cos x + 1$ soit positive. On obtient

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1 + x^\beta)}\,\mathrm{d}x = \int_a^c F'G = [FG]_a^c - \int_a^c FG'. \tag{1}$$

On considère d'abord le cas où au moins une des deux constantes α ou $\alpha + \beta$ est strictement positive; alors $x^\alpha(1 + x^\beta) = x^\alpha + x^{\alpha\beta}$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, ce qui fait que le terme entre crochets dans (1) tend vers 0 quand $c \to +\infty$. Le dernier terme dans (1), c'est à dire $-\displaystyle\int_a^c FG' = \int_a^c F(-G')$, est une fonction croissante de c parce que $F \geq 0$ et $-G' = \dfrac{\alpha + \beta x^\beta}{(x^\alpha + x^{\alpha+\beta})^2} \geq 0$ pour $x \geq a$ (en choisissant a assez grand). D'autre part on a $F \leq 2$ donc

$$\begin{aligned} \int_a^c F(-G') \leq \int_a^c 2(-G') &= [2(-G)]_a^c \\ &= -2G(c) + 2G(a) \\ &\quad \leq 2G(a) \end{aligned}$$

et par conséquent $\displaystyle\lim_{c\to+\infty} \int_a^c F(-G')$ est fini. Tout ceci permet de déduire de (1) que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1 + x^\beta)}\,\mathrm{d}x$ converge.
Il reste à vérifier que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1 + x^\beta)}\,\mathrm{d}x$ diverge si $\alpha \leq 0$ et $\alpha + \beta \leq 0$: dans ce cas on a $x^\alpha(1 + x^\beta) = x^\alpha + x^{\alpha+\beta} \leq 2$ et par conséquent

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(1 + x^\beta)}\,\mathrm{d}x \geq \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Cette inégalité empêche la fonction $\phi(c) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)}\,\mathrm{d}x$ de converger vers une limite finie L quand $c \to +\infty$: si c'était le cas, $\displaystyle\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)}\,\mathrm{d}x = \phi(2k\pi+\ \pi) -\ \phi(2k\pi)$ tendrait vers $L - L = 0$ quand $k \to +\infty$.

En regroupant toutes ces conditions sur α et β on conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha(1+x^\beta)}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\boxed{-\beta < \alpha < 2 \text{ ou } 0 < \alpha < 2-\beta}$.

5. On utilise le critère de Cauchy (pour $a \le c < d$):

$$\begin{aligned}\left|\int_a^c fg - \int_a^d fg\right| &= \left|\int_c^d fg\right| \\ &\le \int_c^d |fg| \\ &\le \max(f)\int_c^d |g|.\end{aligned}$$

Le maximum de f sur l'intervalle $[c,d]$ c'est $f(c)$, qui tend vers 0 quand $c \to +\infty$. Quant à l'intégrale $\displaystyle\int_c^d |g| \le \int_a^d |g|$, elle est supposée bornée indépendamment de d. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc $\left|\displaystyle\int_a^c fg - \int_a^d fg\right| \le \varepsilon$ pour c et d assez grands, et d'après le critère de Cauchy l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} fg$ est convergente.

6. Calculons d'abord

$$\int_0^x \mathrm{Log}\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \mathrm{Log}(1-t)\,\mathrm{d}t = x + (1-x)\mathrm{Log}(1-x). \tag{2}$$

Compte tenu que le développement en série entière de $\mathrm{Log}(1-t)$ est

$$\mathrm{Log}(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \qquad (-1 < x < 1)$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{Log}\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = x + \mathrm{Log}(1-x) - x\mathrm{Log}(1-x) &= x - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n} \\ &= x - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n} \\ &= x - x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+1}}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Vérifions que cette égalité reste vraie pour $x = 1$:

la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}$ se calcule par élimination, du fait que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$; elle vaut donc $1 - \dfrac{1}{N+1}$ et, en faisant $N \to +\infty$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

D'autre part en faisant $x \to 1$ dans (2) on obtient

$$\int_0^1 \mathrm{Log}\frac{1}{1-t}\ \mathrm{d}t = 1 + \lim_{x\to 1}(1-x)\mathrm{Log}(1-x) = 1,$$

on a donc bien $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Log}\frac{1}{1-t}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} =.$