

Feuille d'exercices numéro 2

1. Soit δ la jauge définie sur $[0, 1]$ par

$$\delta(0) = \frac{1}{2}, \quad \delta(t) = t \text{ si } t \neq 0.$$

Déterminer si les subdivisions suivantes sont ou non δ -fines:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{([0, 1/4], 0), ([1/4, 1/2], 1/2), ([1/2, 1], 3/4)\}, \\ \mathcal{P}_2 &= \{([0, 1/4], 0), ([1/4, 1/2], 1/2), ([1/2, 1], 3/5)\}, \\ \mathcal{P}_3 &= \{([0, 1/4], 0), ([1/4, 1/2], 1/2), ([1/2, 1], 1/2)\}.\end{aligned}$$

Calculer les sommes de Riemann $S(f, \mathcal{P})$ pour les trois subdivisions ci-dessus et $f(x) = x^2$.

2. Reprendre l'exercice précédent avec les jauges définies par

$$\delta(0) = \frac{1}{2}, \quad \delta(t) = \frac{3}{2}t \text{ si } t \neq 0$$

et

$$\delta(0) = \frac{1}{2}, \quad \delta(t) = \frac{9}{5}t \text{ si } t \neq 0.$$

3. Soit η la jauge définie sur $[0, 1]$ par

$$\eta(0) = \eta(1) = \frac{1}{4}, \quad \eta(t) = \min\{t, 1-t\} \text{ si } t \in]0, 1[.$$

(a) Montrer que toute subdivision η -fine admet 0 et 1 comme points de marquage.

(b) Construire une subdivision η -fine.

4. Soit f la fonction nulle partout sur $]0, 1]$ et égale à 1 en 0. Montrer que f est intégrable, et donner la valeur de son intégrale.

5. Montrer, en construisant une suite de fonctions en escalier qui la minorent, que la fonction

$$f(0) = 0, \quad f(x) = 1/x \text{ si } x \neq 0$$

n'est pas intégrable sur $[0, 1]$.

6. Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et f une fonction continue sur I . Montrer que f est intégrable au sens de Riemann, au sens où on peut se restreindre aux jauges constantes. Montrer que si f est de signe constant et d'intégrale nulle, elle est nulle.

7. Montrer que si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c).$$

8. Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact. On dit que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est réglée si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

(a) Montrer que f est réglée si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction en escalier ψ_ε telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \psi_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon.$$

(b) Montrer qu'une fonction continue est réglée.

(c) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(0) = 0, \quad f(x) = 1/\sqrt{x} \text{ si } x \neq 0.$$

Montrer que f n'est pas réglée.

(d) Montrer que f est réglée si, et seulement si, elle admet en tout point de $[a, b]$ des limites à droite et à gauche.

(e) Montrer qu'une fonction monotone est réglée.

(f) Montrer qu'une fonction réglée est bornée.

(g) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable.

9. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On définit g sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt.$$

(a) Montrer que g se prolonge par continuité en 0.

(b) Montrer que si f est périodique, alors $g(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$.