

Feuille d'exercices numéro 5

1. Déterminer les limites suivantes, en appliquant le théorème de convergence monotone ou le théorème de convergence dominée:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-a \sin x} dx, \quad \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^\pi e^{-a \sin x} dx, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n \sin x} dx.$$

2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, on veut déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n x^n f(x) dx$$

dans les deux cas suivants:

- On suppose que f' existe et est absolument intégrable; utiliser une intégration par parties.
- On suppose que f est absolument intégrable et continue au point 1; utiliser la définition de la continuité.

3. Soit $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n) dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx.$$

4. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; on suppose que la fonction $t \mapsto t f(t)$ est absolument intégrable. Démontrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt$$

est dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale.

Application: que vaut la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t} dt$?

5. On définit une fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \text{si } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Démontrer que la limite de f_n est nulle mais que la limite de $\int_0^1 f_n(x) dx$ n'est pas nulle. En déduire:

- qu'il n'existe pas de fonctions intégrables g et $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $g \leq f_n \leq h$ pour tout n ;
- que la fonction $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ n'est pas intégrable.

6. Montrer que

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

est une fonction continue de la variable $\alpha > 1$. En déduire, après avoir calculé $F(\alpha)$ pour les α rationnels, que

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}.$$

7. Montrer que la fonction

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt$$

est définie pour tout $x > 0$. Montrer que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

et en déduire les valeurs de Γ aux points entiers. Que dire des propriétés de dérivabilité de Γ ?

8. Montrer que la fonction

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} \, dt$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer f' et en déduire f .