Université de Provence	2008-2009
Licence MI	1ère annèe-S1

Mathématiques générales

Logique élémentaire et théorie des ensembles

1 Introduction

Ce cours est partagé en deux. On commencera par de la logique élémentaire. Par "élémentaire", on veut exprimer le fait que ce sont le vocabulaire et les raisonnements de base que tout étudiant, puis scientifique, utilisera tout le long de sa vie. Ce cours est illustré de nombreux exercices qui permettront d'apprivoiser les symboles et les techniques de base mathématiques.

2 Logique élémentaire

2.1 Définitions et propriétés

Définition 1 *On appelle assertion une phrase dont on peut affirmer qu'elle est vraie ou fausse.*

Une phrase mathématique est formée de mots et de symboles (logiques,mathématiques...).
Exemple d'assertion:

$$x < 2$$

Le cheval est noir

Définition 2 *Soit A une assertion. On définit nonA (ou* **négation** *de A) par : nonA est vraie si et seulement si A est fausse.*

Définition 3 *Soit A et B des assertions. On définit* **disjonction** *de A et B (noté $A \cup B$ ou "A ou B") par : si une des deux assertion est vraie alors $A \cup B$est vraie.*

Définition 4 *Soit A et B des assertions. On définit* **A implique B** *(noté $A \Rightarrow B$) par : "A ou non(B)"*

En d'autres terme, si A est vraie alors B est vraie (il ne peut en être autrement). Donc soit j ai A (vraie) et alors j'ai B, soit je n'ai pas B (et je ne peut avoir A). Attention : B peut être vraie sans que A le soit.

Exemple: A : "$x > 4 > 2$" $B : x \leq 2$
On a bien $A \Rightarrow B$, mais B peut être vraie sans que A le soit .

Définition 5 *Soit A et B des assertions. On définit* **conjonction** *de A et B (noté $A \cap B$ ou "A et B") par :"$A \cap B$" est vraie si et seulement si les deux assertions sont vraies.*

Définition 6 *Soit A et B des assertions. On dit que A est équivalent à B (noté $A \Leftrightarrow B$) si et seulement si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.*

Propriétés-axiomes:

1. $A \Leftrightarrow non(non(A))$

2. $"A \Rightarrow B" \Leftrightarrow "non(B) \Rightarrow non(A)"$
3. $("A \Rightarrow B" et "B \Rightarrow C") \Rightarrow "A \Rightarrow C"$ (transitivité de l'implication)
4. $("A \cup B" et "A \Rightarrow C" et "B \Rightarrow C") \Rightarrow "C"$ (raisonnement par disjonction des cas)

Arretons nous un instant sur le deuxième point: Il s'appelle 'raisonnement par **contraposée**'. Si le fait de ne pas avoir B implique que A ne peut être vraie , alors ce la signifie que si A est vraie alors j'ai B.
En pratique pour montrer une implication, on peut utiliser soit le raisonnement direct (voir exemple pour $A \Rightarrow B$) soit le raisonnement par contraposée , soit le raisonnement par absurde (où on suppose que l'on a "A et non(B)" et on arrive à une contradiction (c est à dire soit non B est fausse soit A est fausse)).

2.2 Quantificateurs

On va dans cette section introduire les symboles mathématiques qui permettent d'écrire les phrases d'une maière rigoureuse et raccourcie. En effet le français (et toute autre langue) amène parfois à une certaine ambiguité due à la subtilité des mots. Or ici on a besoin de rigueur, pour que les assertions soient vraies ou fausse, on ne peut se contenter qu'elles soient "à peu près "vraies.

On note $A(x)$ une assertion vraie pour x.

Définition 7 *On écrit* $"\exists x, A(x)"$ *pour dire que l'assertion est vraie pour au moins un "x" (qu'on ne connait pas forcement).*
Ce symbole se lit "Il existe".

Exemple : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 1 > 0$

Définition 8 *On note* $"\forall x, A(x)"$ *pour signifier que l'assertion est vraie pour tout les "x". Ce symbole se lit "Pour tout".*

Attention: dans les deux cas il est important de vérifier dans quel ensemble (ou sous quelles conditions sur x) l'assertion est estimée vraie.

Propriété: $(non(\exists x, A(x)) \Leftrightarrow (\forall x, non(A(x))$
Cette phrase se lit : "non(il existe un x tel que A(x) est vraie) (=(il n'existe pas de x tel que A(x) soit vraie)) quivaut à dire que pour tout x , A(x) est fausse".

On s'aperçoit alors que lorsqu' on écrit en français cette phrase, le sens en est plus clair. Il faudra donc essayer de lire (et traduire) les phrases symboliques par des phrases en francais courant (tout en restant rigoureux).

En pratique pour montrer qu'une assertion commençant par $\forall$ est **vraie** il faut le montrer pour chacun des x ; alors on en prend un *quelconque*, c'est à dire sans condition supplémentaire dessus et on montre que $A(x)$ est vraie. Pour montrer que l'assertion est **fausse** il suffit trouver un seul contre exemple (alors on contredira "pour tout" puisque $A(x)$ est fausse pour au moins un x).
Pour montrer l'exitence d'un élément vérifiant une assertion, soit on se sert d'un théorème affirmant l'existence d'un tel élément, soit on exhibe cet élément. Au contraire, pour montrer qu'il n'existe pas de tels éléments, on montre que pour tous les éléments l'assertion est fausse.

Remarque : les symboles $\exists$ et $\forall$ ne sont pas interchangeables :
• "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y \leq x$ " est vraie
• "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y \leq x$ " est fausse .
Exercice : Montrer les deux affirmations précédentes.

3 Théorie des ensembles

La notion d'ensemble est fondamentale en mathématiques , en effet elle ne peut être définie à partir d'autres notions.
La théorie des ensembles montre l'existence des ensembles finis et donc des nombres enties ; cependant l'ensemble de tous les entiers $\mathbb{N}$ est axiomatique, appelé axiome de l'infini. A partir de ces ensembles on construit tous les ensembles connus.

3.1 Vocabulaire de base

On peut définir un ensemble comme étant une famille d'objets. On note les ensembles par des crochets $\{x/A(x)\}$). Cela signifie : "l'ensemble des x tels que A(x) est vraie", ou bien par leur nom (exemple l'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$). Mais on peut aussi donner toute la collection d'objets , sans en donner les propriétes (dans le cas où les ensembles sont finis biensur).
Exemples: $\{a\}$, $\{1, 2, 3\}$,$\{x : x + 1 < 0\}$
$\emptyset$ est l'ensemble vide.

Un sous ensemble B d'un ensemble A est alors une famille d'objets déjà contenus dans A. On note "B sous ensemble de A" par le symbole : $B \subset A$.

Les objets sont appelés **éléments** de l' ensemble. L'appartenance d'un élément a à un ensemble A se note $a \in A$. Par définition $a \in A$ si et seulement si $\{a\} \subset A$.

Exemple : $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 4\}$,

En général on note les ensembles par des lettres majuscules et les éléments par des minuscules.

Proposition 1 *Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments. On note deux ensembles égaux par $A = B$ et cela signifie que $A \subset B$ et $B \subset A$.*

Pour montrer l'inclusion de A dans B, il faut montrer l'appartenance de chaque éléments de A dans B.
Exemple : l'ensemble vide est inclu dans tout ensemble.

Pour noter la non inclusion on utilise le symbole $\not\subset$ et pour la non appartenance on utilise $\notin$.

Attention : les notions d'objets et d'ensembles, d'inclusion et d'appartenance sont différentes :
exemple: Soit $A = \{\{1, 2\},\{0, 1, 2\}\}$ un ensemble formé d'ensemble, et $B = \{0, 1, 2\}$. Alors B est un élément de A , $0 \in B$ mais $0 \notin A$. Donc $B \in A$ mais $B \not\subset A$. B est l'ensemble formé des éléments $0, 1, 2$ et $\{B\}$ est l'ensemble formé de l'ensemble B.

C'est ainsi que l'on peut construire à partir d'un ensemble A, l'ensemble de ses parties noté $\mathcal{P}(A)$ formé de tous les sous ensembles de A.
Exercices: Donner l'ensemble des parties de A et de B de l'exemple précédent.

3.2 Construction d'ensembles

A partir d'ensembles donnés on peut construire d'autres ensembles : les ensembles admettent les opérations suivantes .

Définition 9 *Soient $A, , B, C$ des sous ensembles d'un ensemble E.*

1. *Soit $F = \{x \in E : A(x)\}$ un sous ensemble de E vérifiant $A(x)$. On définit le complémentaire de F dans E par*
$$E - F = \{x \in E : x \notin F\}$$
Ce sont les éléments de E qui ne vérifient pas $A(x)$. On le note aussi $\overline{F}$.

2. *On définit* **l'union** *de deux sous ensembles A et B par*
$$A \cup B = \{x \in A ou\ x \in B\}$$

3. *On définit* **l'intersection** *de deux sous ensembles A et B par*
$$A \cap B = \{x \in A et\ x\ \ \in B\}$$
Les deux ensembles précédents sont inclus eux mêmes dans E

4. *le produit cartésien est définit par :*
$$A \times B = \{x = (a, b) : a \in A et\ b \in B\}$$

Définition 10 *Deux parties A et B d'un ensemble E sont dites disjointes si $A \cap B = \emptyset$*

Ces opérations admettent les propriétés suivantes :

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (idem avec $\cup$)
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$
4. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Les preuves sont laissées en exercices.

On peut généraliser la notion d'intersection à une famille de sous ensembles :

Définition 11 *Soit E un ensemble et $\mathcal{F}$ une famille de sous ensembles de E. On appelle intersection de la famille $\mathcal{F}$ l'ensemble noté $\cap_{F \in \mathcal{F}} F$ défini par $\{x \in E : \forall F \in \mathcal{F} avec\ x \in F\}$.*
On appelle réunion de la famille $\mathcal{F}$ l'ensemble noté $\cup_{F \in \mathcal{F}} F$ défini par $\{x \in E : \exists F \in \mathcal{F} avecx \in F\}$.

3.3 Application

Après avoir défini les ensembles et décrit leurs propriétés, on souhaite définir de nouvelles relations entre les ensembles. On va définir ici la notion d'**application** entre deux ensembles.

3.4 Définition

Définition 12 *On appelle* **application** *f de E dans F une correspondance qui à tout élément x de E associe un et un seul élément y de F, qu'on appelle* **image** *de x. E est l'ensemble de définition ou de départ. F est l'ensemble d'arrivée. On note les applications par une flèche :*

$$f : E \to F$$

et l'image d'un point x par $y = f(x)$.

Si tout élément de E a une image (et une seule), en revanche tous les éléments de F ne sont pas *toujours* atteints par f (par "atteint" on signifie qu' il n'existe pas toujours pour $z \in F$ un élément $x \in E$ tel que $f(x) = z$)

Définition 13 *Soit $f : E \to F$ une application. on appelle ensemble image de E par f (ou de f tout simplement par*

$$Im(f) = \{y \in F : \exists x \in E, f(x) = y\}$$

*On appelle dans ce cas x l'***antécédent** *de y.*

On a bien entendu (par définition) $Im(f) \subset F$ mais pas toujours l'égalité.
De plus l'antécédent des points de $Im(f)$ n'est forcément unique.

Exemple: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = 2n$, $Im(f) = 2\mathbb{Z}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$, $Im(f) = \mathbb{R}_+$

Définition 14 *On appelle* **graphe** *de f l'ensemble des points (x, y) dans $E \times F$ tels que $y = f(x)$.*

Définition 15 *L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$*

Exemple: $Id : E \to E$ telle que $Id(x) = x$ est appelée identité.
Si $E \subset F$ on peut définir l'inclusion par $i : E \to F$ telle que $i(x) = x$.

Définition 16 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Alors il existe une unique application $h = gof$ (on prononce g rond f) appelée* **composée** *définie par $\forall x \in E, h(x) = g(f(x))$.*

3.5 Propriétés des applications

Définition 17 *On dit que deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si leurs graphes en tant que parties de $E \times F$ sont égaux (inclu l'un dans l'autre et réciproquement).*

Proposition 2 *Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si $f(x) = g(x)\ \forall x \in E$.*

Définition 18 *Soit $f : E \to F$ une application.*

- *f est dite* **injective** *si et seulement si tout élément $y \in F$ a au plus un antécédent (il peut ne pas en avoir). Cela équivaut à dire :*

$$\forall x, x' \in E\ (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')$$

- *f est dite* **surjective** *si et seulement si tout élément $y \in F$ a au moins un antécédent. Cela équivaut à dire :*

$$Im(f) = F$$

ie

$$\forall y \in F\ \exists x \in E : f(x) = y$$

- *f est dite* **bijective** *si et seulement si tout élément $y \in F$ a un unique antécédent. Cela équivaut à dire que f est à la fois injective et bijective.*

Maintenant que l'on a défini la composition de deux applications on va pouvoir introduire la notion d'application réciproque.

Définition 19 *Soit $f : E \to F$ une application bijective. On définit* **l'application réciproque** *par $f^{-1} : F \to E$ telle que $f^{-1}(y) = x$ où x est l'unique antécédent de y par f.*

Théorème 1 *Cette application est unique.*

On a les théorèmes suivants :

Théorème 2 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Alors*

1. *f et g injectives $\Rightarrow$ gof est injective*
2. *f et g surjectives $\Rightarrow$ gof est surjective*
3. *gof surjective $\Rightarrow$ g est surjective*
4. *gof injective $\Rightarrow$ f est injective*

Théorème 3 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors gof est bijecive et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$*

3.6 Image directe , Image réciproque

Définition 20 *Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie de E. On définit l'***image directe** *de A par f par :*

$$f(A) = \{y \in F : \exists x \in A avec\ y = f(x)\}$$

*Soit $B \in \mathcal{P}(F)$ une partie de F. On définit l'***image réciproque** *de B par f par :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$$

ATTENTION : Dans ce cas précis f^{-1} ne désigne pas l'application réciproque (qui n'existe qu' en cas de bijecivité de f). On écrit $f^{-1}(B)$ en termes ensemblistes et cette écriture n'a de signification que si l'on précise l'ensemble B.

Proposition 3 *Soit $f : E \to F$ une application. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ des parties de E et $A', B' \in \mathcal{P}(F)$ des parties de F.*
On a alors les propriétés suivantes

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; *on a égalité si et seulement si f est injective.*
3. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
5. $f(f^{-1}(A')) \subset A'$
6. $A \subset f^{-1}(f(A))$

La preuve est à faire en exercice.

4 Quelques propriétés des nombres réels

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels : tout nombre non rationnel (ie. n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$) est un irrationnel. Cet ensemble est muni de lois d'addition et de multiplication que l'on suppose connues. On admettra la construction de $\mathbb{R}$ comme ensemble des rationnels et de limites de suites de rationnels (voir livres) : cette construction implique en particulier que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (la définition de densité est justement que tout point de $\mathbb{R}$ peut s'obtenir comme limite d'une suite de points de $\mathbb{Q}$).

L'ensemble des réels est muni d'une relation d'ordre : $<$ et tous les réels peuvent être comparés entre eux.
On dit qu'un ensemble X est majoré (ou borné supérieurement) (resp. minoré ou borné inférieurement) s'il existe un nombre c tel que $x \leq c$ pour tout $x \in X$ (resp. $x \geq c$). Le nombre c s'appelle **majorant** (resp. **minorant**) de X. Un ensemble majoré et minoré est dit borné.
On définit la **borne supérieure** d'un ensemble comme étant le plus petit des majorants de cet ensemble et la **borne inférieure** comme étant le plus grand des minorants. On les note *sup et inf.*

Proposition 4 *On a la propriété suivante :*
pour la borne supérieure :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in X : x + \epsilon > sup(X)$$

pour la borne inférieure :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in X : x - \epsilon < inf(X)$$

La preuve se fait par absurde et est laissée en exercice.

On a le théorème fondamental suivant (théorème de la borne supérieure) :

Théorème 4 *Tout ensemble numérique X majoré (resp. minoré) admet une borne supérieure (resp. inférieure).*

La preuve de ce théorème utilise la **continuité** des nombres réels : Soient X et Y des ensembles numériques tels que $x \leq y$ pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$. Alors il existe $c \in R$ tel que $x \leq c \leq y$. (Cette propriété n'est pas vraie par exemple pour $\mathbb{Q}$).
On considère X un ensemble numérique non vide majoré. Soit Y l'ensemble de ses majorants, non vide aussi. Alors pour tout x dans X et tout y dans Y on a $x \leq y$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq c \leq y$. Ce c existe pour tous les x et y. De la première inégalité on a que c est un majorant de X et de la seconde que c'est le plus petit.