UE21 Partiel 2: Justifiez vos réponses!

10 avril 2014

Corrigé

Exercice 1 (Familles de vecteurs) *À l'aide de déterminants (ou pas), dire si les familles de vecteurs suivantes forment une base de E (sinon indiquer le rang de la famille de vecteurs) :*

On précisera E et sa dimension.

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *(sur 1 point)*

   Réponse : Ils ne forment pas une base de $E = \mathbb{R}^3$ parce qu'ils sont liés par la relation $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$. Cependant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, autrement dit la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ n'est pas liée. Le vecteur $\vec{w}$ est dans le plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et le rang de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est 2.

2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ *(sur 1 point)*

   Réponse : Ils forment une base de $E = \mathbb{R}^3$ parce que leur déterminant n'est pas nul :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 - 3 \cdot 8 = -22.$$

   Le rang de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ (c'est à dire le nombre de vecteurs de la plus grande sous-famille libre de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$) est 3 puisque la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est libre.

3. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *(sur 1 point)*

   Réponse : Ils ne forment pas une base de $E = \mathbb{R}^3$ parce qu'il n'y a que deux vecteurs, alors que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, le rang de $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est 2.

4. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$ *(sur 2 points)*

   Réponse : Toute base de $E = \mathbb{R}^3$ est constituée par trois vecteurs de déterminant non nul. Mais ici il y a quatre vecteurs, ce n'est pas une base. Cette famille est néanmoins de rang 3 : le déterminant de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ vaut 6 et n'est pas nul, d'autre part la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ est liée ($\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{x}$), donc son rang n'est pas 4 mais 3. D'ailleurs il ne pourrait pas être 4 puisque que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3.

Exercice 2 (Applications linéaires) *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *est-elle inversible ?* *(sur 1 point)*

Réponse : Non, son déterminant est nul.

Soit f *l'application linéaire associée à* A *dans la base canonique* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *(avec* $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*).*

1. *Déterminer* $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$. *(sur 0,5 point)*

   Réponse : En calculant $A\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2$, $A\vec{e}_3$, *on obtient les trois colonnes de* A.

2. *Déterminer* $f(\vec{u})$, *avec* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. *(sur 1 point)*

   Réponse : $\begin{pmatrix} 2x - 3y - z \\ x + y + 2z \\ -x - z \end{pmatrix}$.

3. *Déterminer Kerf et une base de Kerf.* *(sur 2 points)*

   Réponse : On pose $f(\vec{u}) = \vec{0}$ *et on essaye de calculer* $\vec{u}$. *Cela fait*

$$\begin{cases} 2x - 3y - z & = & 0 & (L_1) \\ x + y + 2z & = & 0 & (L_2) \\ -x - z & = & 0 & (L_3) \end{cases}$$

   La méthode du pivot donne

$$\begin{cases} 2x - 3y - z & = & 0 & (L_1) \\ 5y + 5z & = & 0 & (L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1) \\ y + z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} 2x - 3y - z & = & 0 & (L_1) \\ 5y + 5z & = & 0 & (L_2) \\ 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow 5L_3 - L_2) \end{cases}$$

   et on obtient $y = -z$ *et* $x = \dfrac{3y + z}{2} = -z$, *ce qui fait*

$$\vec{u} = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1).$$

   Kerf est donc l'ensemble des $(-z, -z, z)$ *et Kerf a pour base* $\{(-1, -1, 1)\}$.

4. *Quelle est la dimension de Imf ? Déterminer Imf et une base de Imf.* *(sur 2,5 points)*

   Réponse : Imf est de dimension 2 d'après la formule $\dim(Kerf) + \dim(Imf) = \dim(E)$ *(ici* E *c'est* $\mathbb{R}^3$ *et* $\dim(E) = 3$*). Pour avoir une base de Imf il suffit de choisir deux vecteurs non colinéaires, parmi les trois colonnes de* A, *par exemple*

$$\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Exercice 3 (Systèmes d'équations) *Résoudre les systèmes :*

On sera précis dans la donnée et la justification des solutions.

1. $\begin{cases} x + 2y - 2z & = & 1 \\ -x + 3y & = & 0 \\ 2x - y + z & = & -3 \end{cases}$ *(sur 3 points)*

Réponse : La méthode du pivot donne deux systèmes d'équations qui ont mêmes solutions que le système initial :

$$\begin{cases} x+2y-2z &= 1 & (L_1) \\ 5y-2z &= 1 & (L_2 \leftarrow L_2+L_1) \\ 5y+z &= -3 & (L_3 \leftarrow L_3+2L_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+2y-2z &= 1 & (L_1) \\ 5y-2z &= 1 & (L_2) \\ 3z &= -4 & (L_3 \leftarrow L_3-L_2) \end{cases}$$

donc $z = \boxed{-\frac{4}{3}}$, $y = \frac{1+2z}{5} = \boxed{-\frac{1}{3}}$ *et* $x = 1-2y+2z = \boxed{-1}$.

2. $\begin{cases} x+2y-2z+4t &= 2 \\ y+3z-4t &= -2 \\ x+y-z+2t &= 2 \end{cases}$ *(sur 3 points)*

   Réponse : La méthode du pivot donne deux systèmes d'équations qui on mêmes solutions que le système initial :

$$\begin{cases} x+2y-2z+4t &= 2 & (L_1) \\ y+3z-4t &= -2 & (L_2) \\ -y+z-2t &= 0 & (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+2y-2z+4t &= 2 & (L_1) \\ y+3z-4t &= -2 & (L_2) \\ 4z-6t &= -2 & (L_3 \leftarrow L_3+L_2) \end{cases}$$

donc t *quelconque*, $z = \frac{-2+6t}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t}$, $y = -2-3z+4t = \boxed{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t}$ *et* $x = 2-2y+2z-4t = \boxed{2}$.

Exercice 4 (Question de cours) 1. *Quand dit-on qu'une matrice M à trois lignes et trois colonnes est inversible ? (sur 1 point)*

Réponse : Quand il existe une matrice, qu'on appelle M^{-1}, et qui vérifie les deux égalités

$$MM^{-1} = I_3 \quad \text{et} \quad M^{-1}M = I_3.$$

2. *Soit M une matrice à trois lignes et trois colonnes telle que*

   $M - M^2 = I_3$

   avec $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Montrer que M est inversible. Exprimez M^{-1} en fonction de M. (sur 1 point)

   Réponse : Les deux égalités de la question 1 sont vérifiées par la matrice $M^{-1} = I_3 - M$:

$$M(I_3-M) = MI_3 - M^2 = M - M^2 = I_3$$

$$(I_3-M)M = I_3M - M^2 = M - M^2 = I_3.$$