Université de Provence	2008–2009

Mathématiques Générales I

Durée : deux heures. Calculettes interdites.

Seul document autorisé : tableau de primitives.

Partiel du 17 décembre 2008

– I –

1) Calculer :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

2) Calculer :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

– II–

En effectuant deux intégrations par parties, calculer :

$$\int_0^{\pi} e^{2x} \sin(x) dx.$$

– III –

Calculer une primitive de la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x\cos(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}.$$

– IV –

On considère l'équation différentielle :

$$y'(t) = 2t\cos^2(y(t))$$

1. Calculer la solution de cette équation qui vérifie $y(0) = 0$.
2. Quel est l'ensemble de définition de la solution ? Préciser l'ensemble des valeurs de la solution.

– T.S.V.P –

– V –

1. Montrer que si y_1 est solution de l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = f_1(t)$ et y_2 est solution de l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = f_2(t)$, alors la fonction $y = y_1 + y_2$ est solution de $y'(t) + y(t) = f_1(t) + f_2(t)$.
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle homogène :
$$y'(t) + y(t) = 0.$$
3. En appliquant la méthode de la variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation différentielle
$$y'(t) + y(t) = e^{-t}.$$
4. Chercher une solution particulière de l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = \sin(t)$ sous la forme $y(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$.
5. En déduire une solution particulière de l'équation différentielle
$$y'(t) + y(t) = e^{-t} + \sin(t).$$
6. Donner la solution de l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = e^{-t} + \sin(t)$ qui vérifie $y(0) = 0$.

– VI –

Soit l'équation différentielle :
$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = te^t \qquad (E)$$

1. Trouver la solution de l'équation différentielle homogène $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$, vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme de $(at + b)e^t$.
3. Trouver la solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
4. Trouver la solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$.