UNIVERSITÉ DE PROVENCE L1PC-S2 2009-2010

Examen partiel, février 2010

Mathématiques pour PC 2

**Exercice 1** (**9p**) Questions de cours :

1. Donner la définition des notions suivantes :
   (a) base de $\mathbb{R}^2$. 1p
   (b) déterminant d'une matrice carrée de taille 2. 1p
   (c) application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. 1p
   (d) matrice orthogonale. 1p
2. Expliquer la correspondence entre matrices carrées de taille 2 et applications linéaires $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. 1p
3. Décrire explicitement l'ensemble de matrices orthogonales de taille 2. 1p
4. Énoncer et démontrer le théorème concernant la forme analytique (soit en utilisant les coordonnées cartésiennes, soit en utilisant les nombres complexes) des isométries planes. 3p

**Exercice 2** (**8p**) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2.

1. Écrire le formule explicite de l'application linéaire $f_A$ et de la composition $f_A \circ f_A$. 2p
2. Calculer $A^2 := A \cdot A$, et $A^3 := A \cdot A \cdot A$ et leur déterminants. 2p
3. Posons $\theta := \mathrm{tr}(A) := a_{11} + a_{22}$, $\delta := \det(A)$. Montrer que $A^2 - \theta A + \delta I_2 = 0_{2,2}$, où $0_{2,2}$ est la matrice nulle de type $(2,2)$. 2p
4. Pour $k = 2$, 3 et 4 trouver des formules de la forme $A^k = u_k A + v_k I_2$, où $u_k$, $v_k$ sont des scalaires exprimés en fonction de $\theta$ et $\delta$. 2p

**Exercice 3** (**16p**) Soit $d$ et $\delta \subset \mathbb{R}^2$ deux droites d'équations $a_1x_1+a_2x_2 = b$, et $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2 = \beta$ respectivement (où $(a_1, a_2) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$). Soit $\Delta := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}$.

1. En supposant que le déterminant $\Delta$ est non-nul, déterminer le point d'intersection $p = (u, v)$ de ces droites, en exprimant les coordonnées $u$, $v$ en fonctions des coefficients $a_1$, $a_2$, $b$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta$. Quelle est l'interprétation géométrique de la condition $\Delta = 0$ ? *Indication : on peut écrire la condition* $\Delta = 0$ *comme une condition de proportionalité entre les coefficients* $a_1$, $a_2$, $\alpha_1$, $\alpha_2$. 2p
2. Écrire les formules explicites (en coordonnées cartésiennes) des symmétries $S_d$, $S_\delta$, par rapport aux droites $d$, $\delta$. 2p
3. Écrire les formules explicites (en coordonnées cartésiennes) de $S_d$, $S_\delta$ et de la composition $S_d \circ S_\delta$ pour
   $$d : \ x_1 - x_2 = 0 \ , \ \delta : x_1 + x_2 = 0 \ ,$$
   Représenter ces droites dans un dessin. 2p
4. En supposant de nouveau $\Delta \neq 0$, montrer que la composition $S_d \circ S_\delta$ est une rotation de centre $p$. *Indication : vous pouvez utiliser un argument géométrique.* Quelle est la relation entre l'angle de cette rotation et l'angle orienté $\angle(\delta, d)$ ? 2p
5. Quel type d'isométrie est la composition $S_d \circ S_{d'}$ dans le cas où $\Delta = 0$ ? Exprimer le vecteur correspondant en fonction des coefficients $a_1$, $a_2$, $b$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta$. 2p
6. Comment faut il choisir les deux droites $d$, $\delta$ pour que 2p
   (a) $S_d \circ S_\delta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
   (b) $S_d \circ S_\delta$ est la symétrie par rapport à un point.
7. Écrire les équations des droites $d'$, $\delta'$ qui sont perpendiculaires sur $d$ et $\delta$ respectivement et passent par l'origine. 2p
8. Déterminer les points d'intersection $c$, $\gamma$ telq ue $\{c\} = d \cap d'$, $\{\gamma\} = \delta \cap \delta'$ et les distances de $0_{\mathbb{R}^2}$ à $d$ et $\delta$. 2p