UNIVERSITÉ DE PROVENCE, Aix-Marseille I

Licence 2006/2007, 2. année

Analyse 2, Planche 1

Cours : John Hubbard, TD : Léa Blanc-Centi, John Hubbard, Jean Michela, Karl Oeljeklaus.

Rappels sur les suites numériques

Définitions et résultats à rappeler :

Suites convergentes, suites de Cauchy, théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème de comparaison etc.

I) Exercice

Étudier la convcergence des suites suivantes : a) $n \mapsto \frac{2n+1}{n+2}$, b) $n \mapsto \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, c) $n \mapsto (1 + \frac{1}{n})^n$, d) $n \mapsto \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$ e) $\sqrt{n}\exp(-\sqrt{\ln n})$, f) $n \mapsto (1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2})...(1 + \frac{1}{n})$, g) $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

II) Exercice

Étudier la monotonie et la convergence des suites $n \mapsto \alpha^{1/n}$ pour chaque nombre réel $\alpha \geq 0$.

III) Exercice

Soit $f(t) := \frac{1}{1+t}$. Montrer que les images successives $I_1 := f([0,1]), ..., I_{n+1} := f(I_n)$ sont des intervalles fermés bornés dont l'intersection $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ se réduit à un seul point que l'on calculera.

IV) Exercice

a) Montrer que la suite x définie par la récurrence $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ et la valeur initiale $x_0 = 1$ est une suite monotone convergente. Calculer sa limite.

La condition initiale $x_0 = 1$ est remplacée par $x_0 \in [0, +\infty[$. Étudier la monotonie et la convergence de ces suites en fonction de x_0.

b) Considérons la suite x définie par la récurrence $x_{n+1} = x_n^2 - 1$ et la valeur initiale x_0. Trouver $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $|x_0| < a$, alors $n \mapsto x_{2n}$ converge. Calculer la limite. Que peut-on dire de $n \mapsto x_{2n+1}$?

V) Exercice

Soit x une suite telle que les suites extraites $n \mapsto x_{2n}$, $n \mapsto x_{2n+1}$ et $n \mapsto x_{3n}$ soient convergentes. Montrer la convergence de x.

VII) Exercice

La suite $n \mapsto n \sin n$ est-elle bornée ?

VIII) Exercice

Soit $x : n \mapsto x_n$ une suite telle que $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{n}$ et telle que la suite extraite $n \mapsto x_{n^2}$ converge. La suite x converge-t-elle ?