Université de Provence
Licence de Mathématiques 2006-2007
M15 (Analyse 2)

TD 3 - Suites de fonctions

D'abord, quelques exercices sur la méthode de Newton. Le premier exercice est l'usage de la méthode de Newton par Newton lui-même ; il avait besoin de ce calcul pour calculer l'excentricité des orbites des planètes.

Exercice 1.

Calculer à 5 décimales une solution $a > 0$ de $\sin x = x/2$. démontrer que la solution est juste à la précision indiquée.

Le second exercice est en fait utilisé dans toutes les calculettes ; c'est comme ça que la machine calcule les puissances fractionnaires.

Exercice 2.

Pour quels a_0 est-on sûr que que la méthode de Newton, utilisée pour résoudre l'équation $x^n - 7 = 0$ convergera.

Exercice 3.

Notons $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ une racine complexe de 1. Donner des disques autour de 1, $\omega, \overline{\omega}$ tels qu'on soit sûr que si on commence la méthode de Newton dans ces disques, on restera dans le disque et on convergera vers la racine dans ce disque.

Exercice 4.

Etudier la méthode de Newton pour l'équation $x^3 - x + \sqrt{2}/2 = 0$. dEemontrer que si on part de 0, on ne converge pas vers une racine. Et si on part de $0,1$?

Suites de Fonctions

Maintenant quelques exercices sur la convergence simple et uniforme. Comme le cours n'est pas arrivé jusque là, il va falloir donner les définitions et propriétés principales.

Exercice 5.

1. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$
2. Etudier la convergence uniforme sur $[1, +\infty[$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :
$$f_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

3. Etudier en fonction du paramètre réel α la convergence simple et uniforme sur $[0, +\infty[$ de la suite de fonctions $(f_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$f_{\alpha,n}(x) = n^\alpha e^{-nx}.$$

Exercice 6.

On considère les suites de fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n, \quad g_n(x) = x^n(1-x), \quad h_n(x) = x^n(1-x^n), \quad i_n(x) = x^n(1-x)^n.$$

1. Etudier la convergence simple et uniforme de ces suites de fonctions sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Que se passe-t-il si l'on remplace l'intervalle fermé $[0, 1]$ par l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$? Et par l'intervalle fermé $[0, a]$ avec $0 < a < 1$?

Exercice 7.

Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $f_n(x) = \frac{1}{n}$ si $|x| \leq n$ et $f_n(x) = 0$ si $n < |x|$.

Exercice 8.

1. Démontrer que si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ converge uniformément vers une fonction f alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$r_n := f_n(x_n) - f(x_n)$$

   converge vers zéro.
2. Application : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

   (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

   (b) Montrer que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $x_n = 2n\pi$, ne converge pas vers zéro. Conclure.

   (c) Montrer que la convergence est uniforme sur les intervalles bornés.

Exercice 8.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^2 e^{-nx^2} dx$. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9.

On considère les deux suites de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = nx^n(1 - x), \qquad g_n(x) = n^2x^n(1 - x).$$

1. Déterminer les limites simples f et g des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. A-t-on
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx \quad ?$$
3. Etudier la convergence uniforme de ces suites de fonctions.
4. Commentaire de ce résultat.

Exercice 10.

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0; 1]$ par

$$h_n(x) = \left| \begin{array}{ll} n^2x & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n}]; \\ -n^2x + 2n & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}]; \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}; 1]. \end{array} \right.$$

1. Déterminer la limite simple de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Calculer $\int_0^1 h_n(x)dx$. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?