Université de Provence
Licence de Mathématiques 2006-20075
M15 (Analyse 2)

TD 4 - Séries entières

Avant de nous lancer dans les séries entières, je propose quelques exercices concernant le cours 4, plus particulièrement concernant la fonction continue dérivable nulle part, et la semi-conjugaison g.

Exercices sur la fonction dérivable nulle part:

Exercice 1.

Démontrer le Lemme 4.6. Faites un dessin!

Exercice 2.

Démontrer le Lemme 4.7. C'est un peu plus difficile.

Exercice 3.

Démontrer le Lemme 4.8. C'est un peu plus facile, cette fois.

Exercices sur la semiconjugaison.

Dans ces exercices, f est une application continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x+1) = f(x)+2$, et f_a est le cas particulier $f_a(x) = 2x + \sin 2\pi x$. La fonction g est celle construite dans le théorème 4.9.

Exercice 4.

(a) Montrer que si f est de classe C^1 et $f'(x) > 1$ pour tout x, alors g est strictement monotone. Pour quelles valeurs de a peut-on appliquer ce résultat à f_a.

(b) Montrer que si $f'(x) > 0$ pour tout x, alors g est encore monotone (mais pas nécessairement strictement).

(c) Montrer que si $f'(x) > 0$ pour tout x, mais $f(0) = 0, f'(0) < 1$, alors g a nécessairement en palier en 0, c'est à dire qu'il y a un voisinage de 0 sur lequel g est constante. Montrer que g a alors une infinité de paliers, ou g prend les valeurs $k/2^n$.

Exercice 5.

Sous l'hypothèse que g est monotone, démontrer que pour tout k, n avec $0 \leq k < 2^n - 1$, il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f^{\circ n}(x) = x + k$.

Exercices sur les séries entières.

Exercice 6.

Pour chacune des séries entières $\sum a_n z^n,\ z \in \mathbb{C}$ ci-dessous, déterminer le rayon de convergence en précisant chaque fois le critère utilisé.

$$a)\ \sum z^n \quad \sum a^n z^n,\ a \in \mathbb{C}, \quad b)\ \sum n! z^n, \quad c)\ \sum \frac{z^n}{n!}, \quad d)\ \sum \frac{n! z^n}{a^n},\ a \in \mathbb{C}^*,$$

$$e)\ \sum \frac{a^n z^n}{n!},\ a \in \mathbb{C}, \quad f)\ \sum (1 + \cdots + (n+1)) z^n, \quad g)\ \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$$

Exercice 7.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Montrer que s'il existe deux nombres complexes α et β de même module $\rho > 0$, tels que $\sum a_n \alpha^n$ converge et $\sum a_n \beta^n$ diverge, alors $R = \rho$. Cette propriété est-elle caractéristique du rayon de convergence ?
2. Montrer que si la suite $(a_n)_n$ ne converge pas vers 0, nécessairement $R \leq 1$. Peut-on affirmer que l'inégalité est stricte ?
3. Montrer que si la suite $(a_n)_n$ est bornée, nécessairement $R \geq 1$.
4. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum z^{n^2}$. Pouvait-on appliquer le critère de d'Alembert ?

Exercice 8.

1. Soit $\Sigma a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que s'il existe deux nombres réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N},\quad \alpha \leq a_n \leq \beta$, alors la série entière $\Sigma a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
2. On considère la série entière $\sum z^{n^2}$. Mettre cette série sous la forme $\sum a_n z^n$ et déterminer son rayon de convergence.

Exercice 9.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $2^n z^n$, $(2^n - 1) z^n$,
2. la somme de $2^n z^n$ et de $(2^n - 1) z^n$,
3. la différence de $2^n z^n$ et de $(2^n - 1) z^n$,

Exercice 10.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence des séries entières

$$\sum 5a_n z^n \ , \quad \sum n a_n z^n \ , \quad \sum 3^n a_n z^n \ , \quad \sum a_n z^{2n} \ .$$

2. Calculer le rayon de convergence de $\sum 3^n n z^{2n}$.

Exercice 11.

Exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}t\right)}{t}\,dt$ comme la somme d'une série.

Exercice 12. *(Extrait de l'examen de septembre 1999.)*

On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^{2n+1}$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)} \ .$$

1. Déterminer son rayon de convergence R et vérifier que la série converge simplement sur $[-R, R]$. On note f sa somme.
2. Démontrer que f est dérivable sur $]-R, R[$ et que $f'(x) = x \arctan x$. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$ (par une intégration par parties).
3. Montrer que la série entière converge normalement sur $[-R, R]$. En déduire que f est continue sur $[-R, R]$.
4. Donner l'expression de f sur $[-R, R]$. Justifier la réponse.
5. Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \ .$$

Exercice 13.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. *(Développement en série entière)*

1. Calculer le développement en série entière en 0 de chacune des fonctions suivantes ; préciser le rayon de convergence.

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x-a} \ (a \in \mathbb{R}^*), \qquad f_2 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{2-9x^4}\right), \qquad f_3 : x \mapsto \arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } \ x < 0, \\ 0 & \text{si } \ x \geq 0, \end{cases}$$

   est de classe C^∞ mais n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 15. *(Résolution d'une équation différentielle linéaire)*

On cherche les solutions de l'équation différentielle

$$(x+1)y' + y = \frac{2}{(1-x)^2} \tag{1}$$

sur l'intervalle $I =]-1, 1[$.

1. Résoudre l'équation homogène sur I.

2. On va chercher une solution particulière de (1) sous la forme d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Rappeler la définition d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0.

3. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (1).

   (a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par les a_n.

   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de a_n en fonction de a_0.

4. Réciproquement, on fixe $a_0 \in \mathbb{R}$ et on suppose que les a_n sont donnés en fonction de a_0 par l'expression trouvée en 3.(b).

   (a) Montrer que si deux séries entières $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ ont même rayon de convergence R, et si leurs coefficients vérifient : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n c_n = 0$, alors la série entière $\sum (b_n + c_n) x^n$ a pour rayon de convergence R.

   (b) En déduire le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ selon la valeur de a_0.

   (c) Déterminer la forme générale des solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0.

5. En déduire l'ensemble des solutions de (1) sur $]-1, 1[$.

Exercice 16. *(Extrait de l'examen de septembre 2004.)*

Soit l'équation différentielle suivante :

$$x^2y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0 \qquad (2)$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de (2) développables en série entière sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note F cet espace.

2.i) Soit $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R. Montrer que $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est solution de (2) si et seulement si $R > 0,\ a_0 = 0$ et les coefficients satisfont une relation de récurrence d'ordre 2 qu'on déterminera.

ii) En déduire alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{2k+2} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_2 \quad , \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k)\ !}a_1.$$

iii) En déduire que $y = a_1 f_1 + a_2 f_2,$ où $f_1(x) = x \sin x$ et $f_2(x) = x \cos x$.

3. Etudier les rayons de convergence de $y,\ f_1$ et f_2. En déduire que F est de dimension 2.

4. Prouver l'existence et l'unicité de la solution de (E) qui vérifie

$$y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = y''(0) = 1,$$

l'expliciter.

Exercice 17.

On considère l'équation différentielle $xy'' + 2y' + xy = 0$ (E). On cherche des solutions de la forme $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Ecrire les relations que satisfont les coefficients a_n.
2. Démontrer que $a_1 = 0$ et en déduire que $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Calculer a_{2p} en fonction de a_0.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$. Calculer $x\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en déduire la valeur de $y(x)$ pour $x \neq 0$ en fonction de a_0.
4. On se propose de retrouver autrement ce résultat. Pour cela, on pose $z(x) = xy(x)$ où la fonction z est de classe C^∞ et vérifie $z(0) = 0$.
   (a) Démontrer que z est solution de l'équation $z'' + z = 0$.
   (b) Retrouver l'expression de $y(x)$ trouvée dans la troisième question.