Université de Provence
Licence de Mathématiques 2004-2005
M15 (Analyse 2)

Planche 6 - Fenêtres, Equation de la chaleur, equation des ondes

D'abord un calcul de série de Fourier, pas trop compliqué si on ne s'embrouille pas.

Exercice 1.

Soit f_1 la fonction périodique de période 2π, impaire, telle que $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$, et définissons

$$f_k(x) = \int_0^x f_{k+1}(t)dt.$$

1. Lesquels des f_k sont pairs ? impairs ? Esquisser les graphes de f_2, f_3, f_4.
2. Calculer la série de Fourier de f_1.
3. Calculer les séries de Fourier de tous les f_k, en intégrant la série de Fourier de f_{k-1} terme à terme. Justifier ce calcul (le cas délicat, et encore pas tellement, est le passage de f_1 à f_2, ensuite les éries convergent uniformément).
4. Calculer les $f_k(x)$ pour $k = 2, 3, 4$ et $-\pi \le x \le \pi$, puis les

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_k(t)|^2 dt$$

5. Utiliser le théorème de Parseval pour calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}},\ k = 1, 2, 3, 4.$$

6. Calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},\ k = 1, 2, 3, 4.$$

L'exercice suivant, long et difficile, concerne les fenêtres. Si vous le faites de bout en bout, vous comprendrez l'essentiel du cours 8.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période 1, et comme d'habitude,

$$c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt.$$

La somme de Fejer de la série de Fourier est

$$SF_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n e^{2\pi inx}.$$

1. Montrer que F_N est la moyenne des sommes de Dirichlet :

$$SF_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} SD_N(f)$$

ou

$$SD_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n x}.$$

2. Montrer que
$$SF_N(f)(x) = \int_0^1 f(t) F_N(x-t)\,dt,$$
ou
$$F_N(u) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin \pi N u}{\sin \pi U}\right)^2.$$
3. Montrer que la fonction F_N est une fonction à laquelle le lemme 8.6 s'applique.
4. Montrer que si f est continu, alors les $SF_N(f)$ convergent uniformément vers f.

Les deux prochains execices concernent les équations $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ et l'équation de la chaleur.

Exercice 3.

La temperature $f(t,x)$ dans une barre de longueur 1 et de conductivité thermique k est en contact avec la glace aux deux bouts. La température est discrétisée en la mesurant aux trois points $x_1 = 1/4,\ x_2 = 1/2,\ x_3 = 3/4$. Cette température obéit à léquation différentielle

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f(t,x_1) \\ f(t,x_2) \\ f(t,x_3) \end{pmatrix} = 16k \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f(t,x_1) \\ f(t,x_2) \\ f(t,x_3) \end{pmatrix}.$$

Le 16 est $1/(1/4)^2$, et 1/4 est l'espacement entre les points de la discrétisation.

A l'instant $t = 0$, on a $f(0,x_1) = f(0,x_3) = 0,\ f(0,x_2) = 1/4$.

1. Trouver une base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ de vecteurs propres pour l'application donnée par la matrice. Montrer que ces vecteurs sont orthogonaux. Donner une explication non-calculatoire de ce fait.
2. Ecrire la température initiale comme combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, de préférence en utilisant le corollaire 7.7.
3. Trouver
$$\begin{pmatrix} f(t,x_1) \\ f(t,x_2) \\ f(t,x_3) \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Nous allons passer au cas non-discrétisé. La température $f(t,x)$ dans la barre obéit à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

à laquelle il faut ajouter les conditions au bord

$$f(t,0) = f(t,x) = 0.$$

1. Expliquer, à l'aide de la formule
$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2},$$
pourquoi l'équation de l'exercice 3 est une discrétisation de l'équation de la chaleur (y compris les valeurs au bord).
2. En considérant l'application
$$g \mapsto kg''$$
comme une application de l'espace des fonctions de classe C^2 sur $[0,1]$ avec $g(0) = g(1) = 0$ dans "lui-même" (vraiment dans les fonctions continues sur $[0,1]$). Chercher les vecteurs propres de cette application.
3. Montrer que les valeurs propres sont toutes négatives, et que les vecteurs propres de valeur propre distinctes sont orthogonaux. Dans quel sens forment-ils une "base" de l'espace des fonctions sur $[0,1]$.
4. On va utiliser la "même" condition initiale que dans le cas discrétisé :
$$f(0,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/4 \text{ ou } x > 3/4 \\ x - 1/4 & \text{si } 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 3/4 - x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 3/4 \end{cases}$$
5. Décomposer $f(0,x)$ suivant la base trouvée au numéro précédant.
6. Ecrire $f(t,x)$.

Le prochain exercice est extrêmement instructif, et dans un certain sens plus difficile que le précédent, car beaucoup moins standard.

Exercice 5.

Répéter l'exercice 4 (sauf la partie 1), mais cette fois on va avoir la barre en contact imparfait avec la glace à l'extrémité $x = 1$, modélisé par
$$f(t,1) = -\frac{\partial f}{\partial x}(t,1).$$
Toutes les parties sont abordables, à l'exception de la fin de la partie 3.

Les trois exercices suivants concernent l'équation des ondes.

Exercice 6.

On a trois poids de masse m, reliés à a deux parois fixes par quatre ressorts de force respective $k,\ K,\ K,\ k$. Les distances $x(t), y(t), z(t)$ entre leurs positions au temps t et leurs positions d'équilibre satisfait à l'équation différentielle
$$m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = \begin{bmatrix} -(k+K) & K & 0 \\ K & -(k+K) & K \\ 0 & K & -(k+K) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
Supposons qu'à l'instant initial on lève la première masse de 1 en laissant les autres en place, et qu'on ne leur donne aucune vitesse initiale :
$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'objectif est de trouver l'évolution du système au cours du temps.

1. Trouver une base de vecteurs propres de la matrice.
2. Montrer que ces vecteurs sont orthogonaux ; expliquer le phénomène.
3. Ecrire les conditions initiales comme combinaison linéaire des vecteurs propres.
4. Ecrire la solution du problème.