.

**Université d'Aix-Marseille I** **Licence de mathématiques, deuxième année**

**Faculté des sciences, Saint Charles** **TD intégration 1**

**Feuille d'exercices numéro 3**

1. Calculer les primitives suivantes:

$$\int e^x \cos x \; dx, \quad \int \frac{\operatorname{Log} x}{x^n} \; dx \; (n \in \mathbb{N}), \quad \int x \arctan x \; dx, \quad \int (x^2+x+1)e^x \; dx \; .$$

2. À l'aide de changements de variables, calculer les primitives suivantes:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}} \; dx \quad (\text{avec } t = \sqrt[6]{2+x}),$$

$$\int \frac{1}{\left((x-1)^2-4\right)^2} \; dx \quad (\text{avec } u = \frac{x-1}{2}),$$

$$\int (\arcsin x)^2 \; dx \; ,$$

$$\int x^2 \sqrt{1+x^3} \; dx \; .$$

3. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\operatorname{Log}\,2} \sqrt{e^x-1} \; dx.$$

4. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle compact $[a,b]$.
   (a) Montrer que

$$\int_a^b f(t) \; dt \;\; = \;\; \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(a-x)(b-x)dx.$$

   (b) En déduire un encadrement de l'intégrale de $f$ entre $a$ et $b$ en fonction des bornes inférieures et supérieures de $f''$ sur $[a,b]$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$ posons

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \; dt.$$

   (a) Établir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(I_n)$.
   (b) En déduire la valeur de $I_n$ pour tout $n$.
   (c) En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k \; .$$

6. Calculer les primitives des fonctions suivantes:

$$\frac{1}{x^2+5} \; , \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-5}} \; , \quad e^x \sin(e^x), \quad \tan^3 x \; , \quad \frac{1}{\tan^3 x} \; ,$$

$$\frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m} \; (m \in \mathbb{N}), \quad \frac{\operatorname{Log} x}{x} \; , \quad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^5 x} \; .$$

7. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante. On définit les deux intégrales $I_1$ et $I_2$ par

$$I_1 = \int_a^b f(t)\ dt\ , \quad I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\ dt\ .$$

(a) Justifier l'existence de l'application réciproque $f^{-1}$ . Quelles propriétés possède-t-elle?

(b) Calculer $I_2$ en fonction de $I_1$ .

(c) Faire un dessin faisant apparaître les graphes de $f$ et $f^{-1}$ , et interpréter le résultat ci-dessus graphiquement.

8. Déterminer les primitives des fonctions suivantes:

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)^3}\ ,\quad \frac{1}{(x^4+1)^2}\ ,\quad \frac{x}{x^4+x^2+1}\ ,\quad \frac{1}{(x-1)(x^2-2x-2)^2}\ ,$$

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}\ ,\quad \frac{2x}{(1-x+x^2)^2}\ ,\quad \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}\ .$$