.

**Université d'Aix-Marseille I** **Licence de mathématiques, deuxième année**

**Faculté des sciences, Saint Charles** **TD intégration 1**

**Feuille d'exercices numéro 4**

0. Démontrer le lemme de Fatou (en utilisant le théorème de convergence uniforme).

1. Déterminer les limites suivantes, en appliquant le théorème de convergence monotone ou le théorème de convergence dominée:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\,dx,\quad \lim_{a\to+\infty}\int_0^\pi e^{-a\sin x}\,dx,\quad \lim_{a\to 0}\int_0^\pi e^{-a\sin x}\,dx,\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n\sin x}\,dx$$

(dans le dernier cas, se ramener à une intégration sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$).

2. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable, on veut déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx^n f(x)\,dx$$

dans les deux cas suivants:
a) On suppose que $f'$ existe et est absolument intégrable; utiliser une intégration par parties.
b) On suppose que $f$ est absolument intégrable et continue au point 1; utiliser la définition de la continuité.

3. Soit $f:[1,e]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\,dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

4. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$; on suppose que la fonction $x\mapsto xf(x)$ est absolument intégrable. Démontrer que la fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t)=\int_0^1 f(x)\sin(xt)\,dx$$

est dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale.
Application: que vaut la dérivée de la fonction $t\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{x}\,dx$?

5. On définit une fonction $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ en posant

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & \text{si } 0\le x<\frac{1}{n}\\[2mm] 2n-n^2x & \text{si } \frac{1}{n}\le x<\frac{2}{n}\\[2mm] 0 & \text{si } \frac{2}{n}\le x\le 1\end{cases}$$

Démontrer que la limite de $f_n$ est nulle mais que la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ n'est pas nulle. En déduire:
a) qu'il n'existe pas de fonction intégrable $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ telles que $|f_n|\le g$ pour tout $n$;
b) que la fonction $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ n'est pas intégrable.