

Techniques Mathématiques de Base (corrigé)

PREMIÈRE SESSION

DURÉE: DEUX HEURES. NI DOCUMENTS, NI CALCULETTES.

4 janvier 2005

– I –

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $z = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

Réponse: $\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ est égal à $\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)}$

c'est à dire à $\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\theta} = z$.

2. En déduire, que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq -1$, il existe alors $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = \frac{1 + ix}{1 - ix}$.

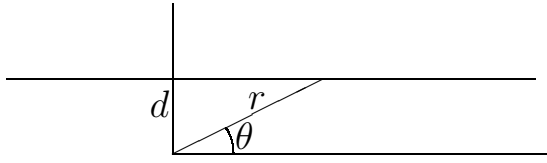
Réponse: Comme $|z| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Comme $z \neq -1$, l'argument de z est différent de celui de -1 c'est à dire $\theta \neq \pi$ (modulo 2π), et par conséquent $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$. Dans l'expression de z obtenue à la question 1, on peut diviser le numérateur et le dénominateur par $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$:

$$z = \frac{1 + i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Le réel $x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ répond à la question 2.

– II –

On repère un point du plan par ses coordonnées polaires (r, θ) . Écrire sous la forme $r = f(\theta)$ l'équation d'une droite horizontale, au-dessus de l'axe des x , distante de l'origine d'une valeur $d > 0$.



Réponse: $r = \frac{d}{\sin \theta}$.

– III –

On considère une fonction réelle de trois variables réelles $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ admettant des dérivées partielles continues. On pose $g(u, v) = f(u + v, u^2, v)$. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f . Appliquer le résultat à $f(x, y, z) = x^2 y \cos(z + y)$.

Réponse: Dérivons par rapport à u (on considère u comme la variable, et v comme une constante):

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

d'où on déduit, compte tenu que $x = u + v$, $y = u^2$ et $z = v$ (constante),

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + 2u \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dérivons par rapport à v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

Application à la fonction $f(x, y, z) = x^2y \cos(z + y)$: en remplaçant $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ par leurs valeurs on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u} &= 2xy \cos(z + y) + 2u(x^2 \cos(z + y) - x^2y \sin(z + y)) \\ &= 2u^2(u + v) \cos(v + u^2) + 2u(u + v)^2 \cos(v + u^2) - 2u^3(u + v)^2 \sin(v + u^2) \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= 2xy \cos(z + y) - x^2y \sin(z + y) \\ &= 2u^2(u + v) \cos(v + u^2) - u^2(u + v)^2 \sin(v + u^2) .\end{aligned}$$

– IV –

On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \frac{y^2}{1 + x^2}$.

On note S la surface dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\}$.

1. Calculer les dérivées partielles de f .

Réponse: $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2xy^2}{(1 + x^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2}$.

2. Calculer les coordonnées d'un vecteur normal au plan tangent à S au point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ où $x_1 = 0$ et $y_1 = 1$.

Réponse: C'est le gradient de la fonction $f(x, y) - z$; c'est donc

$$\left(-\frac{2x_1y_1^2}{(1 + x_1^2)^2}, \frac{2y_1}{1 + x_1^2}, -1 \right) = (0, 2, -1).$$

3. Écrire l'équation du plan tangent à S au point $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Réponse: $(0, 2, -1) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0 \Leftrightarrow 2(y - y_1) - (z - z_1) = 0$
 $\Leftrightarrow 2y - z - 1 = 0.$

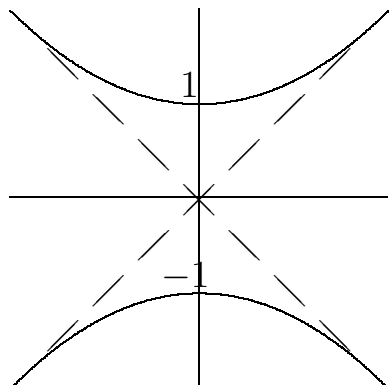
4. Déterminer l'intersection de S avec le plan d'équation $z = 0$.

Réponse: $z = f(x, y) = 0$ équivaut à $z = y = 0$. On obtient donc l'axe des x .

5. Représenter graphiquement avec soin la ligne de niveau définie par $f(x, y) = 1$.

Réponse: $f(x, y) = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{1+x^2}$ ou $-\sqrt{1+x^2}$.

Les asymptotes sont les droites équation $y = x$ et $y = -x$.



6. Calculer les coordonnées d'un vecteur normal à la courbe de niveau $f(x, y) = 1$ au point $(1, \sqrt{2})$.

Réponse: C'est le gradient de la fonction $f(x, y) - 1$ au point $(1, \sqrt{2})$.

D'après la question 1 il vaut

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (-1, \sqrt{2}).$$

– V –

Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(x) + 4y(x) = \cos(4x)$$

vérifiant $y(\pi/4) = 1$ et $y'(\pi/4) = 0$. Puis une solution vérifiant $y(1) = 0$ et $y'(1) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $A \cos(4x) + B \sin(4x)$.

Réponse: a) Si $y(x) = A \cos(4x) + B \sin(4x)$ et $y''(x) + 4y(x) = \cos(4x)$, on a

$$\begin{aligned} y''(x) &= -16A \cos(4x) - 16B \sin(4x) \\ y''(x) + 4y(x) &= -12A \cos(4x) - 12B \sin(4x) \end{aligned}$$

donc $A = -\frac{1}{12}$ et $B = 0$.

b) Si $Y''(x) + 4Y(x) = 0$ alors $Y(x) = C \cos(2x) + D \sin(2x)$ avec C et D constantes.

c) Les solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 4y(x) = \cos(4x)$ sont donc

$$y(x) = -\frac{1}{12} \cos(4x) + C \cos(2x) + D \sin(2x)$$

avec C et D constantes.

$$\begin{aligned} d) \quad y(\pi/4) = 1 &\Leftrightarrow -\frac{1}{12} \cos(\pi) + C \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + D \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow D = \frac{11}{12} \\ y'(\pi/4) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4}{12} \sin(\pi) - 2C \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2D \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \end{aligned}$$

donc $y(x) = \frac{1}{12} (11 \sin(2x) - \cos(4x))$.

$$\begin{aligned} e) \quad y(1) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{12} \cos(4) + C \cos(2) + D \sin(2) = 0 \\ y'(1) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4}{12} \sin(4) - 2C \sin(2) + 2D \cos(2) = 0 \end{aligned}$$

on trouve

$$y(x) = -\frac{1}{12} \cos(4x) + \left(\frac{\cos(2)}{4} - \frac{\cos^3(2)}{6} \right) \cos(2x) + \left(\frac{-\sin(2)}{4} + \frac{\sin^3(2)}{6} \right) \sin(2x).$$